
ET
VE
RI
TAS
CHRISTO
ECCLESIAE

SAMMLUNG VON FORMELN UND SÄTZEN
AUS DEM GEBIETE
DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN
NEBST ANWENDUNGEN

VON

J. THOMAE
JENA

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905

Vorwort.

Eine Sammlung von „Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Funktionen“ ist von Herrn H. A. Schwarz herausgegeben worden. Der große theoretische Wert dieses Buches, das noch unvollendet ist, macht es sehr wünschenswert, daß es bald zu Ende geführt werde. Diese Sammlung baut sich im wesentlichen auf die Weierstraßschen Grundfunktionen $\sigma(u)$ und $p(u)$ auf. Da diese Grundfunktionen zu wirklichen, ich meine numerischen Rechnungen weniger geeignet scheinen, wie auch von andrer Seite bemerkt worden ist (vgl. z. B. Scheibner: Berichte und Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1889), so habe ich mich entschlossen, eine ähnliche Sammlung, die mir schon lange bei meinen Vorlesungen als Skelett gedient hat, und die die Jacobi-Legendreschen Bezeichnungen beibehält, der Allgemeinheit zugänglich zu machen.

Die Aufgabe, die elliptischen Funktionen zu berechnen, wenn Modul und Argument gegeben sind, ist in den Weierstraßschen Formen schon erheblich komplizierter als in den Jacobischen. Die Funktion

$$p(u) = -\frac{d^2 \lg \sigma(u)}{du^2} = -\frac{\sigma''(u)}{\sigma(u)} + \left(\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right)^2$$

ist erstens zweigliedrig und zweitens konvergieren die Zähler erheblich langsamer als die Thetafunktionen.

Für die umgekehrte Aufgabe, das Argument zu berechnen, wenn die Moduln und die elliptischen Funktionen gegeben sind, scheint die Weierstraßsche Theorie überhaupt keine selbständigen Mittel zu besitzen. Im § 48 seiner Sammlung löst Herr Schwarz diese Aufgabe dadurch, daß er für das überall endliche Integral die Legendresche Normalform einführt. Zur Berechnung der Weierstraßschen Größe h, für die Halphen pietätvoller die Jacobische Bezeichnung q beibehalten hat, werden von Weierstraß selbst nicht die Invarianten, sondern der Legendresche Modul k zugrunde gelegt. Die Darstellung der Perioden durch die Invarianten $g_2 g_3$ ist zwar Herrn Bruns (Leipziger Annalen B. 27) in hypergeometrischen Reihen gelungen, ob sie aber zur wirklichen Berechnung einigermaßen brauchbar ist, scheint fraglich.

Die nahe Analogie der Jacobischen Formen mit den trigonometrischen Funktionen halte ich für einen nicht geringen Vorteil, sie dient jedenfalls zur leichteren Aneignung der Formeln.

Aus diesen Gründen halte ich eine Sammlung von Formeln, die die Jacobi-Legendreschen Grundformen bevorzugt, für wünschenswert.

Den Formeln und Sätzen ist eine Reihe von Anwendungen angereiht, die ihre Brauchbarkeit ins Licht setzen. Die Anwendungen sind freilich zum Teil in sehr knapper Form dargestellt, so daß sie nicht ohne einige eigene Arbeit des Lesers werden aufgenommen werden können. Es sollte der Umfang des Büchleins, um dessen wohlwollende Aufnahme ich bitte, möglichst gering sein.

Jena, im Februar 1905.

J. Thomae.

Inhaltsangabe.

Die Formeln und Sätze sind in so gedrängter Form gegeben, daß ein Inhaltsverzeichnis nicht nötig erscheint. Für die Anwendungen aber folgt hier die Inhaltsangabe.

Erster Teil: Formeln und Sätze.

I. Bezeichnungen. Es werde zur Abkürzung gesetzt:

$$\mathfrak{S}\varphi(m) = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots, \quad \bar{\mathfrak{S}}\varphi(m) = \cdots \varphi(-2) + \varphi(-1) + \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots, \quad \mathfrak{P}\varphi(n) = \varphi(0)\,\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots$$

wobei m als Summationsbuchstabe, n als Produktbuchstabe typisch sein mögen.

Die geometrische Faktorielle wird, solange $\operatorname{abs} r < 1$ ist, durch die Gleichung definiert:

$$w(t) = \mathfrak{P}(1 - r^n t) = 1 + \mathfrak{S}(-1)^m t^m r^{\frac{1}{2}m(m-1)} : (1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^m).$$

Sie genügt der Funktionalgleichung $(1-t)w(rt) = w(t)$, und man bildet aus ihr eine eindeutige Funktion mit zwei wesentlich singulären Stellen durch die Gleichung:

$$f(t) = w(t)\,w(r:t) = A\bar{\mathfrak{S}}(-1)^m t^m r^{\frac{1}{2}m(m-1)},$$

welche Reihenentwickelung aus dem Produkt leicht mittels der Funktionalgleichung $tf(rt) = -f(t)$ folgt. Schreiben wir sodann q^2 für r, und einmal e^{2z} für $-t:q$, ein andermal e^{2z} für $t:q$, definieren τ (den Modul) durch $\tau = \lg q$, und verstehen unter D eine von z unabhängige Größe, so erhalten wir die sogenannten Thetafunktionen, definiert durch die Gleichungen:

(1) $$\vartheta(z) = \vartheta_{00}(z) = \bar{\mathfrak{S}} e^{\tau mm + 2mz} = D\mathfrak{P}(1 + q^{2n+1}e^{2z})(1 + q^{2n+1}e^{-2z}) = D\mathfrak{P}(1 + 2q^{2n+1}\cos 2iz + q^{2(2n+1)}).$$

(2) $$\vartheta_{01}(z) = \mathfrak{S}(-1)^m e^{\tau mm + 2mz} = D\mathfrak{P}(1 - q^{2n+1}e^{2z})(1 - q^{2n+1}e^{-2z}) = D\mathfrak{P}(1 - 2q^{2n+1}\cos 2iz + q^{2(2n+1)}),$$

wo zunächst $D = \mathfrak{S}q^{mm} : \mathfrak{P}(1 + q^{2n+1})^2$ ist. Setzt man in (1) und (2) $z + \frac{1}{2}\tau$ für z und multipliziert nachher (1) mit $e^{z + \frac{1}{4}\tau}$ und (2) mit $e^{z + \frac{1}{4}\tau + \frac{1}{2}i\pi}$, so erhält man die beiden Funktionen:

(3) $$\vartheta_{10}(z) = \bar{\mathfrak{S}} e^{\tau\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + (2m+1)z} = 2D\sqrt[4]{q}\cos iz\,\mathfrak{P}(1 + 2q^{2n+2}\cos 2iz + q^{4n+4}) = \vartheta(z + \tfrac{1}{2}\tau)\,e^{z + \frac{1}{4}\tau},$$

(4) $$\vartheta_{11}(z) = \bar{\mathfrak{S}} e^{\tau\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + \frac{2m+1}{2}(2z + i\pi)} = 2D\sqrt[4]{q}\sin iz\,\mathfrak{P}(1 - 2q^{2n+2}\cos 2iz + q^{4n+4}) = ie^{z + \frac{1}{4}\tau}\,\vartheta(z + \tfrac{1}{2}\tau + \tfrac{1}{2}i\pi).$$

D läßt sich nach Jacobi durch ein Produkt allein und durch eine Summe allein, nämlich durch

(5) $$D = \mathfrak{P}(1 - q^{2n+2}) = \bar{\mathfrak{S}}(-1)^m q^{3mm+m} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,q^{-\frac{1}{12}}\,\vartheta'_{11}(\tfrac{2}{3}i\pi,\ \tfrac{1}{3}\tau)$$

ausdrücken. Die Größe τ heißt Modul der Thetafunktion, er pflegt, wie im letzten Ausdrucke, nur dann durch $\vartheta(z,\tau)$ angedeutet zu werden, wenn Zweideutigkeit zu vermeiden ist. Die Größe D ist eine Funktion von q^2, wir setzen sie deshalb gleich $\mathfrak{D}(q^2)$, so daß

(6) $$\mathfrak{D}(q) = \mathfrak{P}(1 - q^{n+1}), \quad \mathfrak{D}(-q) = \mathfrak{P}(1 - q^{2(n+1)})(1 + q^{2n+1}) = \mathfrak{D}(q^2)\,\mathfrak{P}(1 + q^{2n+1})$$

ist. Man findet, wenn man ϑ_{hg} für $\vartheta_{hg}(o)$ schreibt,

(7) $$\vartheta = \mathfrak{P}(1 - q^{2(n+1)})(1 + q^{2n+1})^2 = \mathfrak{D}^2(-q) : \mathfrak{D}(q^2),$$

(8) $$\vartheta_{01} = \mathfrak{P}(1-q^{n+1}):(1+q^{n+1}) = \mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})(1-q^{2n+1})^2 = \mathfrak{D}^2(q):\mathfrak{D}(q^2),$$

(9) $$\vartheta_{10} = \frac{2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{P}(1-q^{4(n+1)})}{\mathfrak{P}(1-q^{4n+2})} = \frac{2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{P}(1-q^{2(n+1)})}{\mathfrak{P}(1-q^{4n+2})^2} = \frac{2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{D}^5(q^2)}{\mathfrak{D}^2(q)\,\mathfrak{D}^2(-q)},$$

(10) $$\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{P}(1-q^{2n+2})^3 = 2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{D}^3(q^2),$$

(11) $$\vartheta'_{11} = \lim \vartheta_{11}(z):z = i\vartheta\vartheta_{01}\vartheta_{10} = 2i\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{D}^3(q^2) \qquad (\lim z = 0).$$

II. Die Nullstellen der Thetafunktionen. Primfaktoren. Aus der Darstellung der Thetafunktionen durch unendliche Produkte erhält man die sämtlichen Werte von z, für die die Thetafunktionen verschwinden. Und zwar ist, wenn mn ganze positive oder negative Zahlen sind,

(1) $$\vartheta_{11}(z) = 0 \text{ für } z = mi\pi + n\tau, \quad \vartheta(z) = 0 \text{ für } z = (2m+1)\tfrac{1}{2}i\pi + (2n+1)\tfrac{1}{2}\tau,$$

(2) $$\vartheta_{01}(z) = 0 \text{ für } z = mi\pi + (2n+1)\tfrac{1}{2}\tau, \quad \vartheta_{10}(z) = 0 \text{ für } z = (2m+1)\tfrac{1}{2}i\pi + n\tau.$$

Stehen π_1 und π_2 in einem komplexen Verhältnisse zueinander, so bildet man mit Weierstraß eine Funktion $\sigma(u)$, die in den Punkten $2m\pi_1 + 2n\pi_2$ verschwindet, als ein aus unendlich vielen Primfaktoren bestehendes unendliches Produkt in der Form:

(3) $$\sigma(u) = u\Pi'\left(1 - \frac{u}{2m\pi_1 + 2n\pi_2}\right) e^{\frac{u}{2m\pi_1+2n\pi_2} + \frac{u^2}{8(m\pi_1+n\pi_2)^2}},$$

wo Π' ein unendliches Produkt bedeutet, in dem für m und n alle ganzen positiven und negativen Zahlen faktorenbildend sind, mit Ausnahme der Kombination $m=0$, $n=0$. Setzt man $q = e^{i\pi\pi_2:\pi_1}$, so kann man hierfür schreiben:

(4) $$\sigma(u) = \frac{2\pi_1}{\pi} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\pi_1}} \sin\frac{u\pi}{2\pi_1}\,\mathfrak{P}\left(1 - 2q^{2n+2}\cos\frac{u\pi}{\pi_1} + q^{4n+4}\right) : \mathfrak{P}(1-q^{2n+2})^2,$$

wo

(5) $$\eta_1 = \frac{\pi^2}{2\pi_1}\left(\frac{1}{6} - \mathfrak{S}\frac{4q^{2m}}{(1-q^{2m})^2}\right)$$

ist. Ersetzt man π_1 durch $\frac{1}{2}i\pi$, π_2 durch $\frac{1}{2}\tau$, u durch z, so folgt:

(6) $$\sigma(z) = -ie^{\frac{-i\eta_1 z^2}{\pi}} \sin iz\,\mathfrak{P}(1 - 2q^{2n+2}\cos 2iz + q^{4(n+1)}) : \mathfrak{P}(1-q^{2n+2})^2.$$

Dieser Ausdruck ist von $\vartheta_{11}(z)$ nur durch einen Exponentialfaktor verschieden, so daß die Darstellung von $\vartheta_{11}(z)$ durch Primfaktoren als erbracht angesehen werden kann.

III. Funktionalgleichungen und Periodizität. Das System zweier Zahlen h, g, welche die Indizes einer Thetafunktion bilden, heißt deren Charakteristik. Ist hg gerade, so heißt die Charakteristik gerade, ist das Produkt ungerade, so heißt die Charakteristik ungerade. Eine Thetafunktion ist mit ihrer Charakteristik gleichzeitig gerade und ungerade. Es ist:

(1) $$\vartheta_{h,g}(z) = \mathfrak{S}e^{\tau\left(\frac{2m+h}{2}\right)^2 + \frac{2m+h}{2}(2z+gi\pi)} = \vartheta(z + \tfrac{1}{2}h\tau + \tfrac{1}{2}gi\pi)e^{\frac{1}{4}\tau h^2 + hz + \frac{1}{2}hgi\pi},$$

(2) $$\vartheta_{2\nu+h,2\mu+g}(z) = (-1)^{\mu h}\vartheta_{h,g}(z), \quad \vartheta_{h,g}(-z) = (-1)^{hg}\vartheta_{h,g}(z),$$

(3) $$\vartheta_{h,g}(z + \tfrac{1}{2}h'\tau + \tfrac{1}{2}g'i\pi) = \vartheta_{h+h',g+g'}(z)e^{-h'z - \frac{1}{4}h'h'\tau - \frac{1}{2}(g+g')h'i\pi}.$$

Für $z=0$ folgt aus (3), wenn ϑ_{hg} für $\vartheta_{hg}(0)$ gesetzt wird, wobei $\vartheta_{11}=0$ ist,

(4) $$\begin{cases} \vartheta(\frac{1}{2}i\pi) = \vartheta_{01}, & \vartheta_{01}(\frac{1}{2}i\pi) = \vartheta, & \vartheta_{10}(\frac{1}{2}i\pi) = 0, & \vartheta_{11}(\frac{1}{2}i\pi) = -\vartheta_{10}, \\ \vartheta(\frac{1}{2}\tau) = e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{10}, & \vartheta_{01}(\frac{1}{2}\tau) = 0, & \vartheta_{10}(\frac{1}{2}\tau) = e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta, & \vartheta_{11}(\frac{1}{2}\tau) = -ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{01}, \\ \vartheta(\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}i\pi) = 0, & \vartheta_{01}(\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}i\pi) = e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{10}, & \vartheta_{10}(\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}i\pi) = -ie^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta_{01}, & \vartheta_{11}(\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}i\pi) = -e^{-\frac{1}{4}\tau}\vartheta. \end{cases}$$

(5) $$\vartheta_{hg}(z+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\vartheta_{hg}(z), \quad \vartheta_{hg}(z+\mu\tau) = (-1)^{\mu g}e^{-2\mu z-\mu\mu\tau}\vartheta_{hg}(z).$$

Ist $\varphi(z)$ eine ganze transzendente Funktion, welche die Gleichungen befriedigt

(6) $$\varphi(z+\lambda i\pi) = (-1)^{h\lambda}\varphi(z), \quad \varphi(z+\mu\tau) = (-1)^{\mu g}\varphi(z)e^{-2\mu z p-\mu\mu\tau p},$$

so heißt φ eine Thetafunktion p^{ter} Ordnung und der Charakteristik h, g und ist in der Form darstellbar:

(7) $$\varphi(z) = \Sigma B_r\bar{\vartheta}(pz+\tfrac{1}{2}(2r+h)\tau+\tfrac{1}{2}gi\pi)e^{(2r+h)z},$$

worin die Summe über die Zahlen $r = 0, 1, 2, \ldots p-1$ zu erstrecken ist, und $\bar{\vartheta}$ eine Thetafunktion mit dem Modul $p\tau$ bedeutet. Die Funktion $\varphi(z) = \vartheta(z)^\alpha\vartheta_{01}(z)^\beta\vartheta_{10}(z)^\gamma\vartheta_{11}(z)^\delta$ ist eine Thetafunktion $\alpha+\beta+\gamma+\delta^{\text{ter}}$ Ordnung und der Charakteristik $\gamma+\delta$, $\beta+\delta$.

(8) Zwischen je $p+1$ Thetafunktionen p^{ter} Ordnung gleicher Charakteristik besteht eine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten.

IV. Beziehungen zwischen k und q, und Beziehungen zwischen Quadraten der Thetafunktionen. Zur Abkürzung führt man k und k' durch die Gleichungen ein

(1) $$\vartheta_{10}^2 : \vartheta^2 = k, \quad \vartheta_{01}^2 : \vartheta^2 = k',$$

(2) $$\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta} = \sqrt{k'} = \mathfrak{P}\frac{(1-q^{2n+1})^2}{(1+q^{2n+1})^2}, \quad \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta} = \sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1+q^{2(n+1)}}{1+q^{2n+1}}\right)^2.$$

Es nimmt $\sqrt{k'}$ also auch k' monoton von 1 bis 0 ab, wenn q reell von 0 bis 1 zunimmt, und k nimmt monoton von 0 bis 1 zu, wenn q von 0 bis 1 zunimmt. Daraus folgt

(3) Zu jedem reellen k zwischen 0 und 1 gibt es ein und nur ein reelles q zwischen 0 und 1.

Auf ähnliche Weise ergibt sich der Satz:

(4) Für jedes negativ reelle k^2 oder jedes rein imaginäre k gibt es ein und nur ein negativ reelles q.

Es ist

(5) $$k\vartheta_{01}^2(z) = \vartheta_{11}^2(z) + k'\vartheta_{10}^2(z), \quad \vartheta_{10}^2(z) = k\vartheta_{11}^2(z) + k'\vartheta^2(z), \quad k'\vartheta_{01}^2(z) = \vartheta^2(z) - k\vartheta_{10}^2(z),$$

(6) $$\vartheta_{01}^2(z) = k\vartheta_{11}^2(z) + k'\vartheta^2(z), \quad \vartheta^4 = \vartheta_{01}^4 + \vartheta_{10}^4, \quad k^2 + k'^2 = 1.$$

V. Die sogenannten Additionstheoreme der Thetafunktionen. Die Thetaquadrate sind Thetafunktionen zweiter Ordnung mit der Charakteristik 0,0. Die Funktion $\vartheta_{hg}(z+t)\vartheta_{h'g'}(z-t)$ ist eine Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik $h+h'$, $g+g'$. Hieraus erhält man die Gleichungen:

(1) $$\vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{11}(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta_{10}(t)\vartheta(t)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z) + \vartheta_{10}(z)\vartheta(z)\vartheta_{11}(t)\vartheta_{01}(t),$$

(2) $$\vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{11}(z-t)\vartheta_{01}(z+t) = \vartheta_{10}(t)\vartheta(t)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}(z) - \vartheta_{10}(z)\vartheta(z)\vartheta_{11}(t)\vartheta_{01}(t),$$

(3) $$\vartheta_{01}^2\vartheta_{01}(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta_{01}^2(t)\vartheta_{01}^2(z) - \vartheta_{11}^2(z)\vartheta_{11}^2(t),$$

(4) $$\vartheta_{01}^2\vartheta(z+t)\vartheta(z-t) = \vartheta^2(z)\vartheta_{01}^2(t) - \vartheta_{10}^2(z)\vartheta_{11}^2(t) = \vartheta^2(t)\vartheta_{01}^2(z) - \vartheta_{10}^2(t)\vartheta_{11}^2(z).$$

(5) $$\vartheta_{10}\vartheta_{01}\vartheta_{10}(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta_{10}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{01}(t) - \vartheta(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta(t)\vartheta_{11}(t),$$

(6) $$\vartheta_{10}\vartheta_{01}\vartheta_{10}(z-t)\vartheta_{01}(z+t) = \vartheta_{10}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{01}(t) + \vartheta(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta(t)\vartheta_{11}(t),$$

(7) $$\vartheta\vartheta_{01}\vartheta(z+t)\vartheta_{01}(z-t) = \vartheta(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta(t)\vartheta_{01}(t) - \vartheta_{10}(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{11}(t),$$

(8) $$\vartheta\vartheta_{01}\vartheta(z-t)\vartheta_{01}(z+t) = \vartheta(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta(t)\vartheta_{01}(t) + \vartheta_{10}(z)\vartheta_{11}(z)\vartheta_{10}(t)\vartheta_{11}(t),$$

(9) $$\vartheta_{01}^3\vartheta_{01}(2z) = \vartheta_{01}^4(z) - \vartheta_{11}^4(z), \quad \vartheta\vartheta_{01}^2\vartheta(2z) = \vartheta^2(z)\vartheta_{01}^2(z) - \vartheta_{10}^2(z)\vartheta_{11}^2(z),$$

(10) $$\vartheta_{01}^2\vartheta_{10}\vartheta_{10}(2z) = \vartheta_{10}^2(z)\vartheta_{01}^2(z) - \vartheta^2(z)\vartheta_{11}^2(z), \quad \vartheta_{10}^3\vartheta_{10}(2z) = \vartheta^4(z) - \vartheta_{01}^4(z),$$

(11) $$\vartheta\vartheta_{10}\vartheta_{01}\vartheta_{11}(2z) = 2\vartheta(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(z)\vartheta_{11}(z).$$

VI. Eine einfache Transformation vierter Ordnung. Durch Umordnung der Reihen erhält man:

(1) $$\vartheta(z,\tau)=\vartheta(2z,4\tau)+\vartheta_{10}(2z,4\tau),$$

(2) $$\vartheta_{01}(z,\tau)=\vartheta(2z,4\tau)-\vartheta_{10}(2z,4\tau),$$

(3) $$\vartheta_{10}^3(0,\tau)\vartheta_{10}(z,\tau)=8\vartheta(z,4\tau)\vartheta_{10}(z,4\tau)(\vartheta^2(z,4\tau)+\vartheta_{10}^2(z,4\tau)),$$

(4) $$\vartheta_{10}^3(0,\tau)\vartheta_{11}(z,\tau)=8\vartheta_{01}(z,4\tau)\vartheta_{11}(z,4\tau)(\vartheta_{01}^2(z,4\tau)+\vartheta_{11}^2(z,4\tau)),$$

(5) $$\vartheta_{10}^3(0,\tau)\vartheta_{11}'(0,\tau)=8\vartheta_{11}'(0,4\tau)\vartheta_{01}^3(0,4\tau),$$

(6) $$\vartheta(0,\tau)\vartheta_{01}(0,\tau)\vartheta_{10}^4(0,\tau)=8\vartheta(0,4\tau)\vartheta_{10}(0,4\tau)\vartheta_{01}^4(0,4\tau),$$

(7) $$\frac{\vartheta_{11}'(0,\tau)}{\vartheta(0,\tau)\vartheta_{01}(0,\tau)\vartheta_{10}(0,\tau)}=\frac{\vartheta_{11}'(0,4\tau)}{\vartheta(0,4\tau)\vartheta_{01}(0,4\tau)\vartheta_{10}(0,4\tau)}=\frac{\vartheta_{11}'(0,4^n\tau)}{\vartheta(0,4^n\tau)\vartheta_{01}(0,4^n\tau)\vartheta_{10}(0,4^n\tau)}=i.$$

VII. Die Jacobische Thetaformel. Setzt man

$$2w'=w+x+y+z,\quad 2x'=w+x-y-z,\quad 2y'=w-x+y-z,\quad 2z'=w-x-y+z,$$
$$2w=w'+x'+y'+z',\quad 2x=w'+x'-y'-z',\quad 2y=w'-x'+y'-z',\quad 2z=w'-x'-y'+z',$$

so lauten die Jacobischen Formeln:

$$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta_{10}(w)\vartheta_{10}(x)\vartheta_{10}(y)\vartheta_{10}(z)=\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z')+\vartheta_{10}(w')\vartheta_{10}(x')\vartheta_{10}(y')\vartheta_{10}(z'),$$
$$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)-\vartheta_{10}(w)\vartheta_{10}(x)\vartheta_{10}(y)\vartheta_{10}(z)=\vartheta_{01}(w')\vartheta_{01}(x')\vartheta_{01}(y')\vartheta_{01}(z')+\vartheta_{11}(w')\vartheta_{11}(x')\vartheta_{11}(y')\vartheta_{11}(z').$$

Jacobi unterscheidet die vier Thetafunktionen nicht durch Doppelindizes, sondern durch einfache, und zwar entsprechen sich die Charakteristiken

0, 1, 2, 3 und 01, 11, 10, 00.

Der Index 0 wird nicht angeschrieben, wie hier die Charakteristik 00 meist unterdrückt wird.

VIII. Die Jacobischen Bezeichnungen. Wir führen nun die Größen K, K', u ein, wie sie durch Jacobi üblich sind, und wiederholen in diesen Bezeichnungen einige Formeln:

(1) $$z=-u\pi i:2K,\quad u=2iKz:\pi,\quad lg\,q=\tau=-\pi K':K,\quad \Theta_{hg}(u)=\vartheta_{hg}(-ui\pi:2K),\quad \Theta_{hg}=\vartheta_{hg},$$

(2) $$\Theta_{hg}(u+2\lambda K)=(-1)^{h\lambda}\Theta_{hg}(u),\quad \Theta_{hg}(u+2\mu iK')=(-1)^{\mu g}\Theta_{hg}(u)e^{\frac{\mu\mu\pi K'}{K}-\frac{\mu u i\pi}{K}},$$

(3) $$\lim_{u=0}\Theta_{11}(u):u=\Theta_{11}',\quad \pi\vartheta_{11}'=2iK\Theta_{11}',\quad 2K\Theta_{11}'=\pi\Theta\Theta_{01}\Theta_{10},$$

(4) $$\Theta_{hg}(u+h'iK'+g'K)=\Theta_{h-h',g-g'}(u)e^{-\frac{h'u\pi i}{2K}+\frac{1}{4}\frac{h'h'\pi K'}{K}+\frac{i\pi}{2}h'(g-g')},\quad \Theta_{h+2\mu,g+2\nu}(u)=(-1)^{h\nu}\Theta_{hg}(u).$$

(4a) $$\Theta_{hg}(u+h'iK'+g'K):\Theta_{h_1g_1}(u+h'iK'+g'K)=e^{\frac{i\pi}{2}h'(g-g_1)}\Theta_{h-h',g-g'}(u):\Theta_{h_1-h',g_1-g'}(u),$$

(5) $$\begin{cases}\Theta(K)=\Theta_{01}=\vartheta_{01}, & \Theta_{01}(K)=\Theta=\vartheta, & \Theta_{10}(K)=0, & \Theta_{11}(K)=\Theta_{10}=\vartheta_{10},\\ \Theta(iK')=\Theta_{10}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{01}(iK')=0, & \Theta_{10}(iK')=\Theta:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{11}(iK')=i\Theta_{01}:\sqrt[4]{q}.\\ \Theta(K+iK')=0, & \Theta_{01}(iK'+K)=\Theta_{10}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{10}(iK'+K)=-i\Theta_{01}:\sqrt[4]{q}, & \Theta_{11}(K+iK')=\Theta:\sqrt[4]{q},\end{cases}$$

(6) $\Theta_{10}:\Theta=\sqrt{k}$, $\Theta_{01}:\Theta=\sqrt{k'}$, $\Theta_{01}^4+\Theta_{10}^4=\Theta^4$. Die Vorzeichen der Wurzeln sind durch q bestimmt.

(7) $\Theta(u)=1+2\mathfrak{S}q^{mm}\cos(m\pi u:K)$, (8) $\Theta_{01}(u)=1+2\mathfrak{S}(-1)^m q^{mm}\cos(m\pi u:K)$,

(9) $\Theta_{10}(u)=2q^{\frac{1}{4}}\mathfrak{S}q^{m(m-1)}\cos[(2m-1)\pi u:2K]$, (10) $\Theta_{11}(u)=2q^{\frac{1}{4}}\mathfrak{S}q^{m(m-1)}(-1)^{m-1}\sin[(2m-1)\pi u:2K]$.

IX. Die elliptischen Funktionen. Die elliptischen Funktionen werden durch Thetaquotienten definiert:

(1) $$sa\,u=\Theta_{11}(u):\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u),\quad ca\,u=\sqrt{k'}\,\Theta_{10}(u):\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u),\quad da\,u=\sqrt{k'}\,\Theta(u):\Theta_{01}(u),$$
$$tga\,u=sa\,u:ca\,u=\Theta_{11}(u):\sqrt{k'}\,\Theta_{10}(u),\quad ja\,u=k'\,sa\,u:da\,u=\sqrt{k'}\,\Theta_{11}(u):\sqrt{k}\,\Theta(u);$$

sie sind teils gerade, teils ungerade Funktion, nämlich es ist:

(2) $\quad sa - u = - sa\,u, \quad ca - u = ca\,u, \quad da - u = da\,u, \quad tga - u = - tga\,u, \quad ja - u = - ja\,u;$

aus den unter IV 5 stehenden Formeln und aus den unter III stehenden folgt:

(3) $\quad sa^2 u + ca^2 u = 1, \quad k^2 sa^2 u + da^2 u = 1, \quad da^2 u - k^2 ca^2 u = k'^2,$

(4) $\quad sa\,0 = 0, \quad ca\,0 = 1, \quad da\,0 = 1, \quad tga\,0 = ja\,0 = 0, \quad sa\,iK' = ca\,iK' = da\,iK' = tga\,K = ja\,K + iK' = \infty,$

(5) $\quad sa\,K = 1, \quad ca\,K = 0, \quad da\,K = k', \quad sa\,K + iK' = 1 : k, \quad ca\,K + iK' = - ik' : k, \quad da\,K + iK' = 0,$

(6) $\quad sa\,iK' : ca\,iK' : da\,iK' = i : 1 : k.$

Diese neuen Funktionen hängen zunächst von drei Größen u, K, K' ab, von denen in der Bezeichnung nur die erste angedeutet ist, es wird aber die Bedeutung der Bezeichnung nachher durch die Beziehung $sa'\,0 = 1$ so beschränkt werden, daß sie (die elliptischen Funktionen) außer von u nur noch von $K' : K$ abhängen. Auch ohne diese Beschränkung sind die unter X stehenden Formeln richtig.

X. Periodizität. Die elliptischen Funktionen sind doppeltperiodische Funktionen. Aus der Periodizität der Thetafunktionen leitet man ohne Mühe die Beziehungen ab:

(1) $sa^2 u + 2K = sa^2 u + 2iK' = sa^2 u, \quad ca^2 u + 2K = ca^2 u + 2iK' = ca^2 u, \quad da^2 u + 2K = da^2 u + 2iK' = da^2 u,$

(2) $sa\,u + 4K = sa\,u + 2iK' = sa\,u, \quad ca\,u + 4K = ca\,u + 2K + 2iK' = ca\,u, \quad da\,u + 2K = da\,u + 4iK' = da\,u,$

oder (3) $sa\,u \pm 4\lambda K \pm 2\mu iK' = sa\,u, \quad ca\,u \pm 4\lambda K \pm \mu(2K + 2iK') = ca\,u, \quad da\,u \pm 2\lambda K \pm 4\mu iK' = da\,u,$

(4) $sa - u = - sa\,u, \quad ca - u = ca\,u, \quad da - u = da\,u,$

(5) $sa\,u - K = - ca\,u : da\,u, \quad ca\,u - K = k' sa\,u : da\,u, \quad da\,u - K = da\,K - u = k' : da\,u,$

(6) $sa\,u + K = sa\,K - u = ca\,u : da\,u, \quad ca\,u + K = - ca\,K - u = - k' sa\,u : da\,u, \quad da\,u + K = k' : da\,u,$

(7) $sa\,u \pm 2K = - sa\,u, \quad ca\,u \pm 2K = - ca\,u, \quad da\,u \pm 2K = da\,u,$

(8) $sa\,2K - u = sa\,u, \quad ca\,2K - u = - ca\,u, \quad da\,2K - u = da\,u,$

(9) $sa\,u \pm iK' = 1 : k\,sa\,u, \quad ca\,u \pm iK' = \pm\, da\,u : ik\,sa\,u, \quad da\,u \pm iK' = \pm\, ca\,u : i\,sa\,u,$

(10) $sa\,u \pm 2iK' = sa\,u, \quad ca\,u \pm 2iK' = - ca\,u, \quad da\,u \pm 2iK' = - da\,u,$

(11) $sa\,u + K + iK' = da\,u : k\,ca\,u, \quad ca\,u + K + iK' = k' : ik\,ca\,u, \quad da\,u + K + iK' = ik' sa\,u : ca\,u,$

(12) $tga\,(u \pm 2\lambda K \pm 4\mu iK') = tga\,u, \quad ja\,(u \pm 4\lambda K \pm 2\mu(K + iK')) = ja\,u,$

(13) $tga\,(u + K) = - ca\,u : k' sa\,u = - 1 : k'\,tga\,u, \quad ja\,(u + K) = ca\,u,$

(14) $tga\,(u + iK') = i : da\,u, \quad ja\,(u + iK') = ik' : k\,ca\,u,$

(15) $tga\,(u + K + iK') = i\,da\,u : k', \quad ja\,(u + K + iK') = da\,u : ik\,sa\,u.$

Der Polfaktor von $sa\,u$ an der Stelle $u = iK'$ ist $1 : k$.

Die Größen iK' und K stehen in einem komplexen Verhältnisse zueinander, wenn die Thetafunktionen konvergieren, daher stehen auch die Perioden der hier definierten doppeltperiodischen Funktionen, z. B. die Perioden $2K$, $2iK'$ der Quadrate von *sa ca da* in einem komplexen Verhältnis zueinander. Konstruiert man in der die komplexen Zahlen u darstellenden Ebene ein Parallelogramm mit den Ecken u_0, $u_0 + 2K$, $u_0 + 2K + 2iK'$, $u_0 + 2iK'$, so nennt man dasselbe ein Periodenparallelogramm. Es hat einen von Null verschiedenen Flächeninhalt gleich $abs\,2K \cdot abs\,2iK' \cdot sin\,arc\,(2iK' : 2K)$. Durch kongruente Wiederholung des Parallelogrammes bedeckt man die ganze u-Ebene mit kongruenten Parallelogrammen. Eine doppeltperiodische Funktion ist vollständig bekannt, wenn man sie in einem Periodenparallelogramm kennt, im Unendlichen ist sie unbestimmt. Zahlen, deren Differenz eine Summe von Vielfachen der beiden Perioden ist, heißen kongruent, ihre Träger in der u-Ebene werden zur Deckung gebracht, wenn man die Periodenparallelogramme zur Deckung bringt, in denen sie sich befinden.

Für $q=0$ ist: $\Theta(u)=1$, $\Theta_{01}(u)=1$, $\Theta_{10}(u):\sqrt[4]{q}=2\cos(\pi u:2K)$, $\Theta_{11}(u):\sqrt[4]{q}=2\sin(\pi u:2K)$,
$\Theta_{10}:\Theta\sqrt[4]{q}=\sqrt{k}:\sqrt[4]{q}=2$, $\Theta_{01}:\Theta=\sqrt{k'}=1$, $sa\,u=\sin(\pi u:2K)$, $ca\,u=\cos(\pi u:2K)$ $da\,u=1$.

Tritt noch die engere Bestimmung hinzu $\lim sa\,u:u=sa'0=1$, so folgt noch $2K=\pi$.

Wird unter VIII $z=-ui\pi:2\bar{K}$, $\tau=-\pi\bar{K}':\bar{K}$ gesetzt, und ist $\bar{K}':\bar{K}=K':K$, wo K der Bedingung $sa'0=1$ gemäß bestimmt ist, so ist $\Theta_{11}(u):\sqrt{k}\,\Theta_{01}(u)=sa\,\varrho u$, $\varrho=K:\bar{K}$.

XI. Werttabelle. Aus den Formeln XII 8, 9 konstruiert man leicht folgende Werttabelle:

$u =$		0	$\frac{1}{2}K$	K	$\frac{3}{2}K$	$2K$
0	sa	0	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}}$	1	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}}$	0
	ca	1	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	0	$-\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	-1
	da	1	$\sqrt{k'}$	k'	$\sqrt{k'}$	1
$\frac{1}{2}iK'$	sa	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{\frac{k+ik'}{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{\frac{k-ik'}{k}}$	$\frac{-i}{\sqrt{k}}$
	ca	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$\sqrt{\frac{-ik'}{k}}$	$-i\sqrt{\frac{1-k}{k}}$	$-\sqrt{\frac{ik'}{k}}$	$-\sqrt{\frac{1+k}{k}}$
	da	$\sqrt{1+k}$	$\sqrt{k'(k'-ik)}$	$\sqrt{1-k}$	$\sqrt{k'(k'+ik)}$	$\sqrt{1+k}$
iK'	sa	∞	$\sqrt{\frac{1}{1-k'}}$	$\frac{1}{k}$	$\sqrt{\frac{1}{1-k'}}$	∞
	ca	∞	$-\sqrt{\frac{-k'}{1-k'}}$	$\frac{-ik'}{k}$	$-\sqrt{\frac{-k'}{1-k'}}$	∞
	da	∞	$-\sqrt{-k'}$	0	$i\sqrt{k'}$	∞
$\frac{3}{2}iK'$	sa	$\frac{-i}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{\frac{k-ik'}{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{\frac{k+ik'}{k}}$	$\frac{i}{\sqrt{k}}$
	ca	$-\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$-\sqrt{\frac{ik'}{k}}$	$-i\sqrt{\frac{1-k}{k}}$	$\sqrt{\frac{-ik'}{k}}$	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$
	da	$-\sqrt{1+k}$	$\sqrt{k'(k'+ik)}$	$-\sqrt{1-k}$	$-\sqrt{k'(k'-ik)}$	$-\sqrt{1+k}$
$2iK'$	sa	0	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}}$	1	$\sqrt{\frac{1}{1+k'}}$	0
	ca	-1	$-\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	0	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	1
	da	-1	$-\sqrt{k'}$	$-k'$	$-\sqrt{k'}$	-1

Ist $u=\frac{2}{3}K$, so besteht die in $X=k\,sa^2u$ biquadratische Gleichung

$$X^4-6X^2+4\frac{1+k^2}{k}X-3=0,$$

deren kubische Invariante g_3 und deren quadratische Invariante g_2 die Werte haben: $g_2=0$, $g_3=-k'^4:k^2$. Setzt man $\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$, so findet man daraus:

$$X = k\,sa^2\tfrac{2}{3}\mu K + \tfrac{2}{3}\nu iK' = \sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{k'^4}{4k^2}}} + \sqrt{1+\alpha\sqrt[3]{\frac{k'^4}{4k^2}}} + \sqrt{1+\alpha^2\sqrt[3]{\frac{k'^4}{4k^2}}}.$$

Das Vorzeichen der drei Quadratwurzeln ist so zu bestimmen, daß für positiv reelle k ihr Produkt negativ wird. — Die entsprechenden Werte von $tga\,u$, $ja\,u$ sind in die Tabelle nicht aufgenommen, weil sie aus ihr sehr leicht abgeleitet werden.

XII. Additionstheoreme. Diese werden aus den Formeln unter III durch Division erhalten. Zur Abkürzung werde $N = 1 - k^2 sa^2 u\, sa^2 v$ gesetzt, so hat man:

(1) $sa(u \pm v) = (sa\,u\,ca\,v\,da\,v \pm sa\,v\,ca\,u\,da\,u) : N$, $\quad sa(u+v)\,sa(u-v) = (sa^2 u - sa^2 v) : N$,

(2) $sa(u+v) + sa(u-v) = 2\,sa\,u\,ca\,v\,da\,v : N$, $\quad sa(u+v) - sa(u-v) = 2\,ca\,u\,da\,u\,sa\,v : N$,

(3) $ca(u \pm v) = (ca\,u\,ca\,v \mp sa\,u\,sa\,v\,da\,u\,da\,v) : N$, $\quad ca(u+v) + ca(u-v) = 2\,ca\,u\,ca\,v : N$,

(4) $ca(u+v) - ca(u-v) = -2\,sa\,u\,sa\,v\,da\,u\,da\,v : N$, $\quad 1 + ca(u+v)\,ca(u-v) = (ca^2 u + ca^2 v) : N$,

(5) $da(u \pm v) = (da\,u\,da\,v \mp k^2 sa\,u\,sa\,v\,ca\,u\,ca\,v) : N$, $\quad da(u+v) + da(u-v) = 2\,da\,u\,da\,v : N$,

(6) $da(u+v) - da(u-v) = -2k^2 sa\,u\,sa\,v\,ca\,u\,ca\,v : N$, $\quad 1 + da(u+v)\,da(u-v) = (da^2 u + da^2 v) : N$,

(7) $ca(u \pm v) = ca\,u\,ca\,v \mp sa\,u\,sa\,v\,da(u \pm v)$, $\quad sa\,2u = 2\,sa\,u\,ca\,u\,da\,u : (1 - k^2 sa^4 u)$,

(8) $ca\,2u = (ca^2 u - sa^2 u\,da\,2u)$, $\quad da\,2u = (da^2 u - k^2 sa^2 u\,ca^2 u) : (1 - k^2 sa^4 u)$,

(9) $sa^2 u = (1 - ca\,2u) : (1 + da\,2u)$, $\quad ca^2 u = (ca\,2u + da\,2u) : (1 + da\,2u)$, $\quad da^2 u = (k'^2 + da\,2u + k^2 ca\,2u) : (1 + da\,2u)$,

(10) $sa\,3u = sa\,u[3 - 4(1+k^2)sa^2 u + 6k^2 sa^4 u - k^4 sa^8 u] : [1 - 6k^2 sa^4 u + 4k^2(1+k^2)sa^6 u - 3k^4 sa^8 u]$,

(11) $sa(u + \tfrac{1}{2}iK') = \sqrt{(k\,sa\,2u + i\,da\,2u) : k(sa\,2u - i\,ca\,2u)} \cdot 0 < k < 1$, $\quad abs\,sa(u + \tfrac{1}{2}iK') = 1 : \sqrt{k}$,

(12) $tga(u+v) = (tga\,u\,da\,v + tga\,v\,da\,u) : (1 - tga\,u\,tga\,v\,da\,u\,da\,v)$,

(13) $ja(u+v) = k'^2(ja\,u\,ca\,v + ja\,v\,ca\,u) : (k'^2 - k^2 ja\,u\,ja\,v\,ca\,u\,ca\,v)$.

XIII. Darstellung von q durch k. Ist k gegeben, so gibt es unendlich viele Werte von q, für die $\Theta_{10} : \Theta = \sqrt{k}$ ist. Kennt man einen, so ergeben sich die übrigen durch die lineare Transformation der Thetafunktionen. Man findet aber für jeden Wert von k einen Wert von q durch die von Weierstraß und Mertens genau untersuchte Reihenentwickelung

(1) $$q = e^{\frac{-\pi K'}{K}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^9 + \frac{150}{2^{13}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{13} + \frac{1707}{2^{17}}\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{17} + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}tg^2\beta + \tfrac{1}{16}tg^{10}\beta + \tfrac{15}{512}tg^{18}\beta + \cdots,$$

wo $\sqrt{k'} = \cos 2\beta$ ist. Es zeigt sich später, daß $K\ K'$ sich vertauschen, wenn $k\ k'$ vertauscht werden, woraus nebenbei folgt, daß für $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $q = e^{-\pi}$ ist. Setzen wir $q' = e^{-\pi K : K'}$, so finden wir auf Grund dieses Vertauschungssatzes:

(2) $$q' = e^{-\pi K : K'} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^9 + \cdots, \quad lg\,q \cdot lg\,q' = \pi\pi,$$

und es wird sich diese Reihe zur Berechnung von $K : K'$ besser eignen als die unter (1), wenn sie besser konvergiert, z. B. für reelle $k > \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. — Es ist $e^{-\pi} = 0{,}04327351826377\ldots < 1 : 23$.

Die Koeffizienten der Reihe für q sind sämtlich positiv, und es ist der Koeffizient von

$$(1 - \sqrt{k'})^{4n+1} : (1 + \sqrt{k'})^{4n+1} < 1 : 4(2n-1).$$

Ist $sa'0 = 1$, so folgt:

(3) $$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta = 1 + 2\mathfrak{S}q^{mm}, \quad \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = \Theta_{01}, \quad \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} = \Theta_{10}, \quad \sqrt{\frac{2Kkk'}{\pi}} = \Theta'_{11},$$

(4) $$K = \tfrac{1}{2}\pi(1 + 2\mathfrak{S}q^{mm})^2 = \tfrac{1}{2}\pi\,\mathfrak{P}(1+q^{2n+1})^4(1-q^{2n+2})^2, \quad \pi K' = -K\,lg\,q,$$

$$K = \frac{\pi}{2\sqrt{k'}}\left(1 - \frac{4q^2}{1+q^2} + \frac{4q^6}{1+q^4} - \frac{4q^{12}}{1+q^6} + \frac{4q^{20}}{1+q^8} - + \cdots\right),$$

(5) $$\tfrac{1}{2}\Theta + \tfrac{1}{2}\Theta_{01} = \left(\frac{1+\sqrt{k'}}{2}\right)\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \cdots$$

Diese Formel eignet sich vorzüglich zu numerischer Berechnung.

XIV. Die Ableitungen der elliptischen Funktionen. Aus den Additionstheoremen folgt:

(1) $$sa'u = ca\,u\,da\,u = \sqrt{(1 - sa^2u)(1 - k^2 sa^2 u)}, \quad sa''u = -sa\,u(1 + k^2 - 2k^2 sa^2 u),$$

(2) $$ca'u = -da\,u\,sa\,u = -k'\sqrt{(1 - ca^2u)\left(1 + \frac{k^2}{k'^2}ca^2u\right)}, \quad ca''u = -ca\,u(1 - 2k^2 sa^2 u),$$

(3) $$da'u = -k^2 sa\,u\,ca\,u = -k'\sqrt{(da^2u - 1)\left(1 - \frac{1}{k'^2}da^2u\right)}, \quad da''u = -k^2 da\,u\,(1 - 2sa^2u),$$

(4) $$tga'u = da\,u : ca^2u = \sqrt{(1 + tga^2u)(1 + k'^2 tga^2 u)},$$

(5) $$ja'u = k'ca\,u : da^2u = k'\sqrt{(1 - ja^2u)\left(1 + \frac{k^2}{k'^2}ja^2u\right)},$$

(6) $$(sa^2u)' = 2\sqrt{sa^2u \cdot 1 - sa^2u \cdot 1 - k^2 sa^2 u},$$

(7) $$(sa''u)^2 + (da''u)^2 : k^2 = k^2 + (1 - 2k^2)\,sa^2u \quad \text{und} \quad = \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad k^2 = \tfrac{1}{2}.$$

In der Reihe

(8) $$sa\,u = u - \frac{1+k^2}{fac\,3}u^3 + \frac{1 + 14k^2 + k^4}{fac\,5}u^5 - \frac{1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6}{fac\,7}u^7 + \cdot - \cdots$$

sind die Koeffizienten ganze Funktionen von k^2.

XV. Die Liouvilleschen Sätze. Im 88. Bande des Crelleschen Journals hat Borchard Sätze über doppeltperiodische Funktionen veröffentlicht, die einer Vorlesung von Liouville entnommen sind. Manche dieser Sätze sind wohl schon anderen Mathematikern bekannt gewesen, wir wollen sie aber als Liouvilles Sätze bezeichnen und zur bequemen Zitation mit Nummern versehen. Zunächst ist das

Periodenparallelogramm

zu besprechen. Es handelt sich um Funktionen von u, welche außer in Polen von einfacher oder mehrfacher, aber endlicher Multiplizität im Endlichen den Charakter ganzer Funktionen haben, d. h. durch aufsteigende Potenzreihen darstellbar sind. Ist u_{00} ein Punkt der u-Ebene, so bilden wir aus den Punkten

$$u_{00}, \quad u_{10} = u_{00} + 2\pi_1, \quad u_{11} = u_{00} + 2\pi_1 + 2\pi_2, \quad u_{01} = u_{00} + 2\pi_2$$

ein Parallelogramm, nehmen an, daß es ein eigentliches sei, also einen von Null verschiedenen Flächeninhalt besitze, nehmen ferner an, daß die Richtung $u_{00} \ldots u_{10}$ in die Richtung $u_{00} \ldots u_{01}$ durch eine positive Drehung um weniger als eine halbe Umdrehung gebracht werden könne. Dann wird

$$q = e^{i\pi\pi_2 : \pi_1},$$

absolut genommen, kleiner als 1 sein. Zum Periodenparallelogramm rechnen wir das ganze Innere desselben, die Ecke u_{00} und die beiden in u_{00} zusammenstoßenden Seiten. Die Ecken $u_{10} u_{01} u_{11}$ und die beiden anderen Seiten werden bei Aussprache der Liouvilleschen Sätze nicht zum Parallelogramm gerechnet.

Ist eine Funktion durch eine Reihe von der Form darstellbar

$$\frac{A_{-m}}{(u-a)^m} + \frac{A_{-m+1}}{(u-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{u-a} + A_0 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \cdots,$$

so wollen wir A_1 den ersten Polfaktor dieser Funktion im Pole a nennen, oder schlechthin den Polfaktor, wenn der Pol ein einfacher ist. Sind $A_{-m+1}, A_{-m+2}, \ldots A_{-1}$ sämtlich Null, so mag der Pol ein reiner m-facher Pol heißen.

In den folgenden Sätzen sind $2\pi_1$, $2\pi_2$ die Perioden der doppeltperiodischen Funktionen, von denen sie handeln.

1) Eine doppeltperiodische Funktion ohne einen Pol im P-Parallelogramm existiert nicht. Oder eine doppeltperiodische Funktion, von der man nachweist, daß sie keinen Pol besitze, ist notwendig eine Konstante.

Eine doppeltperiodische Funktion, die nicht konstant ist, nimmt jeden Wert z mindestens einmal an.

2) Eine doppeltperiodische Funktion, die nur einen (einfachen) Pol im P-Parallelogramm besitzt, existiert nicht, oder eine doppeltperiodische Funktion, von der man nachweist, daß sie nicht mehr als einen (einfachen) Pol besitzt, hat gar keinen Pol, sondern reduziert sich auf eine Konstante.

Eine doppeltperiodische Funktion nimmt jeden Wert z im Periodenparallelogramm mindestens zweimal an.

3) Eine doppeltperiodische Funktion $\psi(u)$ zweiter Ordnung, d. h. eine Funktion mit zwei (einfachen) Polen oder einem Doppelpol läßt sich durch eine Funktion φ mit denselben Polen in der Form darstellen:

$$\psi(u) = A\varphi(u) + B,$$

wo AB Konstanten sind.

Eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung nimmt jeden Wert zweimal und nur zweimal an.

Hilfssatz. Eine doppeltperiodische Funktion $\chi(u)$ zweiter Ordnung mit den Polen $\alpha_1\alpha_2$, die in einem Punkt β_1 verschwindet, läßt sich durch Thetafunktionen darstellen, indem $(\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2)$

$$\chi(u) = \frac{\Theta(u-\alpha_1)\,\Theta(u-\alpha_2)}{\Theta_{11}(u-\alpha_1)\,\Theta_{11}(u-\alpha_2)} - \frac{\Theta(\beta_1-\alpha_1)\,\Theta(\beta_1-\alpha_2)}{\Theta_{11}(\beta_1-\alpha_1)\,\Theta_{11}(\beta_1-\alpha_2)} = C\cdot\frac{\Theta_{11}(u-\beta_1)\,\Theta_{11}(u-\beta_2)}{\Theta_{11}(u-\alpha_1)\,\Theta_{11}(u-\alpha_2)}$$

eine solche Funktion ist. Ihr kann noch ein willkürlicher konstanter Faktor gegeben werden. $\alpha_1\alpha_2$ können zusammenfallen. Aus dieser Darstellung folgt $\chi(\alpha_1 + \alpha_2 - u) = \chi(u)$.

4) Die Summe der (ersten) Polfaktoren einer doppeltperiodischen Funktion zweiter Ordnung ist Null.

5) Die Summe der Werte $u'u''$ von u, für die eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung denselben Wert annimmt, ist der Summe der Polargumente, also einer Konstanten kongruent:

$$u' + u'' \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \beta_1 + \beta_2,$$

wo $\alpha_1\alpha_2$ die Polstellen, $\beta_1\beta_2$ die Nullstellen sind.

6) Hat die doppeltperiodische Funktion $\varphi(u)$ die Pole $\alpha_1\alpha_2$, die Nullstellen $\beta_1\beta_2$, so läßt sich durch diese Funktion mit abgeändertem Argument eine Funktion mit den Polen $\alpha_1'\alpha_2'$, den Nullstellen $\beta_1'\beta_2'$ in der Form:

$$\chi\begin{pmatrix}\alpha_1'\,\alpha_2'\\ \beta_1'\,\beta_2'\end{pmatrix}, u\Bigr) = \chi(u) = C\frac{\varphi[u + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1' - \alpha_2')] - \varphi[\beta_1' + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1' - \alpha_2')]}{\varphi[u + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1' - \alpha_2')] - \varphi[\alpha_1' + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1' - \alpha_2')]}$$

unter der Bedingung darstellen, daß $\alpha_1' + \alpha_2' \equiv \beta_1' + \beta_2'$ ist.

Ist $\alpha_1' + \alpha_2' \equiv \alpha_1 + \alpha_2$, so läßt sich χ durch φ ohne Argumentänderung linear in der Form darstellen:

$$\chi(u) = C[\varphi(u) - \varphi(\beta_1')] : [\varphi(u) - \varphi(\alpha_1')].$$

Einfache Beispiele sind:

$$sa(u + 2K) = -sa\,u, \quad sa(u + iK') = 1 : k\,sa\,u, \quad sa(2K + iK' + u) = -1 : k\,sa\,u.$$

Die Sätze 2) 4) 5) 6) lassen eine Erweiterung auf doppeltperiodische Funktionen n^{ter} Ordnung zu.

2a) Eine doppeltperiodische Funktion n^{ter} Ordnung nimmt jeden Wert n und nur n-mal im Periodenparallelogramm an.

4a) Die Summe der ersten Polfaktoren einer doppeltperiodischen Funktion n^{ter} Ordnung ist Null.

5a) Die Summe der Werte $u'u''\ldots u^{(n)}$, für die eine doppeltperiodische Funktion denselben Wert annimmt, ist einer Konstanten, also etwa der Summe der Polargumente, oder der Argumente der Nullstellen kongruent:

$$u' + u'' \cdots + u^{(n)} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \equiv \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n.$$

6a) Eine doppeltperiodische Funktion $F(u)$ n^{ter} Ordnung mit den Polen $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ und den Nullstellen $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n \equiv \beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n$ ist, läßt sich in der Form darstellen:

$$F(u) = \chi\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \\ \beta_1, \beta_1', \end{pmatrix} u\Big) \cdot \chi\begin{pmatrix}\alpha_3, \beta_1', \\ \beta_2, \beta_2', \end{pmatrix} u\Big) \cdot \chi\begin{pmatrix}\alpha_4, \beta_2', \\ \beta_3, \beta_3', \end{pmatrix} u\Big) \cdots \chi\begin{pmatrix}\alpha_n, \beta_{n-2}', \\ \beta_{n-1}, \beta_n, \end{pmatrix} u\Big),$$

und also nach 6) durch eine Funktion $\varphi(u)$ zweiter Ordnung mit Argumenten von der Form $u + c$.

7) Zwischen einer doppeltperiodischen Funktion n^{ter} Ordnung und ihrer Ableitung besteht eine algebraische Gleichung. — Die Ableitung einer doppeltperiodischen Funktion hat dieselben Perioden als die Mutterfunktion und ist mindestens von der dritten Ordnung.

8) Eine doppeltperiodische Funktion n^{ter} Ordnung läßt sich durch eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung und deren Ableitung rational (ohne Abänderung des Argumentes) darstellen.

XVI. Die lineare Transformation. Hat eine doppeltperiodische Funktion $\psi(u)$ die Perioden $2\varrho\mathfrak{K}$, $2i\varrho\mathfrak{K}'$ (arc $(i\mathfrak{K}' : \mathfrak{K}) < \pi$), den Doppelpol $u = i\varrho\mathfrak{K}'$, die Doppel-Nullstelle $u = 0$ und für $u = \varrho\mathfrak{K}$ den Wert Eins, so ist sie in der Form darstellbar:

$$\psi(u) = \frac{\vartheta_{11}^2\left(-\frac{u\pi i}{2\varrho\mathfrak{K}}, \bar{\tau}\right)}{\vartheta_{11}^2\left(-\frac{u\pi i}{2\varrho\mathfrak{K}}, \bar{\tau}\right)}, \quad \mathfrak{k} = \frac{\vartheta_{10}^2(0, \bar{\tau})}{\vartheta^2(0, \bar{\tau})}, \quad \bar{\tau} = -\pi\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}},$$

und wird, wenn wir $\varrho = 1 : g$ setzen, durch $sa^2(gu, \mathfrak{k})$ zu bezeichnen sein, wenn

$$2\mathfrak{K} = \pi\vartheta^2(0, \bar{\tau})$$

ist. Wird nun

$$\varrho i\mathfrak{K}' = \alpha iK' + \beta K, \quad \varrho\mathfrak{K} = \gamma iK' + \delta K; \quad iK' = \delta\varrho i\mathfrak{K}' - \beta\varrho\mathfrak{K}, \quad K = -\gamma\varrho i\mathfrak{K}' + \alpha\varrho\mathfrak{K}$$

gesetzt, wo $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen sind, die der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und wo $2K$, $2iK'$ die Perioden von $sa^2(u, k)$ sind, so läßt sich nach Nr. XV 6 die Gleichung ansetzen:

$$sa^2(gu, \mathfrak{k}) = A\, sa^2(u, k) : (B\, sa^2(u, k) + C),$$

worin sich die Konstanten $A : B : C, g, \mathfrak{k}$ durch Spezialisierung von u auf 0, K, iK', $K + iK'$ bestimmen lassen. Man unterscheidet sechs Fälle. Im ersten ist α, δ ungerade, β, γ gerade; er führt auf die unendlich vielen Darstellungsformen der elliptischen Funktionen, nämlich auf die Gleichung

$$sa^2(u, k) = sa^2(u, \mathfrak{k}),$$

wo $\bar{\tau}$, der zu $\mathfrak{k}$ gehörende Modul der darstellenden Thetafunktionen, in der Form enthalten ist:

$$\bar{\tau} = i\pi(\alpha iK' + \beta K) : (\gamma iK' + \delta K).$$

Im zweiten Falle ist β gerade, α, γ, δ ungerade, im dritten ist α, δ gerade, $\beta\gamma$ ungerade, im vierten Falle ist α gerade, β, γ, δ ungerade, im fünften ist δ gerade, α, β, γ ungerade, im sechsten ist γ gerade, $\alpha\beta\delta$ ungerade. In den letzten fünf Fällen darf man für $\alpha\beta\gamma\delta$ spezielle möglichst einfache Werte annehmen, weil man durch Verbindung derselben mit dem ersten zu den allgemeinen Fällen zurückkehrt. Diese fünf Fälle führen zu den folgenden Transformationen:

(1) $$k^2 sa^2(u, k) = sa^2\left(uk, \frac{1}{k}\right), \quad lg\, q\left(\frac{1}{k}\right) = i\pi\frac{iK'}{iK' + K},$$

(2) $$-sa^2(u, k) = \frac{sa^2(iu, k')}{ca^2(iu, k')} = tga^2(iu, k'), \quad lg\, q(k') = \frac{-\pi K}{K'},$$

(2a) $$i\, sa(u, k) = tga(iu, k'), \quad ca(ui, k) = 1 : ca(u, k'), \quad da(ui, k) = da(u, k') : ca(u, k'),$$

(3) $$-k'^2 sa^2(u, k) = \frac{sa^2\left(iuk', \frac{1}{k'}\right)}{da^2\left(iuk', \frac{1}{k'}\right)}, \quad k^2 sa^2 u = ja^2\left(iuk', \frac{1}{k'}\right), \quad lg\, q\left(\frac{1}{k'}\right) = \frac{-\pi K}{K' - iK},$$

(4) $$-k^2 sa^2(u, k) = \frac{sa^2\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right)}{ca^2\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right)} = tga^2\left(iuk, \frac{ik'}{k}\right), \quad q\left(\frac{ik'}{k}\right) = -e^{\frac{-\pi K}{K'}},$$

$$k'^2 sa^2(u, k) = \frac{sa^2\left(uk', \frac{ik}{k'}\right)}{da^2\left(uk', \frac{ik}{k'}\right)}, \quad sa^2 u = ja^2\left(uk', \frac{ik}{k'}\right), \quad q\left(\frac{ik}{k'}\right) = -q. \tag{5}$$

Die Quadrate der sechs Moduln sind die sechs möglichen Doppelverhältnisse aus vier Elementen

$$k^2, \quad 1:k^2, \quad 1-k^2, \quad 1:(1-k^2), \quad (k^2-1):k^2, \quad k^2:(k^2-1).$$

Will man diese Gleichungen aus den Thetafunktionen ableiten, so gehe man von der Formel aus:

$$\vartheta(z, \tau) = \sqrt{\frac{-\pi}{\gamma\tau + \delta i\pi}}\, e^{\frac{-z^2\gamma}{\gamma\tau+\delta i\pi} - \frac{i\pi}{4}\psi}\, \vartheta_{\gamma\delta, \alpha\beta}\left(\frac{i\pi z}{\gamma\tau + \delta i\pi}, i\pi\frac{\alpha\tau + \beta i\pi}{\gamma\tau + \delta i\pi}\right), \tag{6}$$

worin ψ eine von $\alpha\beta\gamma\delta$ abhängende ganze Zahl und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. In dem speziellen Falle

$$\vartheta_{hg}(z, \tau) = \sqrt{\frac{-\pi}{\tau}}\, e^{-(z^2:\tau) + \frac{1}{2}hgi\pi}\, \vartheta_{gh}\left(\frac{i\pi z}{\tau}, \frac{\pi^2}{\tau}\right) \tag{7}$$

ist der reelle Teil der Quadratwurzel positiv zu nehmen. Zur Konstantenbestimmung bedient man sich vielfach der Gleichung

$$\frac{\partial^2\vartheta(z)}{\partial z^2} = \frac{4\partial\vartheta(z)}{\partial\tau}. \tag{8}$$

Die Transformation (2a) pflegt dazu verwendet zu werden, $sa(u + vi)$ für $0 < k < 1$ auf die Form $X + Yi$ zu bringen. Es ist nämlich

$$X = sa\,u\, da(v, k') : (ca^2(v, k') + k^2 sa^2 u\, sa^2(v, k')), \quad Y = ca\,u\, da\,u\, sa(v, k')\, ca(v, k') : (ca^2(u, k') + k^2 sa^2 u\, sa^2(v, k')).$$

Betrachtet man XY als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes und nimmt entweder u oder v konstant an, so erhält man die Parameterdarstellung zweier orthogonaler Scharen von Kurven, die von Siebeck im 57. und 59. Bande des Crelleschen Journals diskutiert sind.

Für $k = i$ ist in der ersten Transformation der Modul rechts und links derselbe. Daraus folgt

$$sa\,iu = i\,sa\,u, \quad ca\,iu = da\,u, \quad da\,iu = ca\,u, \quad sa'u = \sqrt{1 - sa^4 u}, \quad k = i, \quad k' = \sqrt{2}. \tag{9}$$

XVII. Verlauf der Funktionen $sa\,u\; ca\,u\; da\,u$, wenn $0 < k < 1$ ist. In diesem Falle kann man q positiv reell annehmen. Die Summe der Argumentwerte u, für die diese Funktionen denselben Wert annehmen, ist bezw.

$$2K, \quad 0, \quad 0.$$

Deshalb sind alle drei Funktionen für reelle u reell und zwischen 0 und K positiv reell und monoton. Die Funktion $sa\,u$ wächst von 0 bis 1, wenn u von 0 bis K zunimmt, und nimmt von da (symmetrisch zu $u = K$) monoton bis 0 ab. Von da ergibt sich der Verlauf aus den Gleichungen $sa(2K + u) = -sa\,u$ $\;sa - u = -sa\,u$ und aus der Periodizität. Die Kurve $y = sa\,x$ hat, roh genommen, eine ähnliche Gestalt als die Kurve $y = \sin(\pi x : 2K)$, mit der sie die Maxima und Minima und Achsenschnitte gemein hat (Gestalt eines rotierenden Seiles). Für $x = \frac{1}{2}K$ hat die Kurve $y = sa\,x$ den Wert $1 : \sqrt{1 + k'} > 1 : \sqrt{2} = \sin\frac{1}{4}\pi$, die erste Kurve steigt rascher an als die zweite. An den Stellen $0, 2K, 4K, \ldots$ hat die Kurve Wendepunkte mit dem Azimut $\frac{1}{4}\pi$.

Die Funktion $ca\,u$ nimmt monoton von 1 bis 0 ab, wenn u von 0 bis K wächst. Ihr weiterer Verlauf ergibt sich aus den Gleichungen $ca(-u) = ca\,u$ und $ca(2K + u) = ca(2K - u)$. Sie hat mit der Kurve $y = \cos(\pi x : 2K)$ die Maxima und Minima und die Achsenschnitte gemein, läßt sich aber mit der Kurve $y = sa\,x$ durch Verschiebung nicht zur Deckung bringen.

Die Funktion $da\,u$ ist für reelle u fortwährend positiv, nimmt zwischen 0 und K monoton von 1 bis k' ab. Der weitere Verlauf ergibt sich aus der Gleichung $da - u = da\,u$ und aus der Periodizität. Sie hat mit der Funktion $\sqrt{[1 - k^2\sin^2(\pi x : 2K)]}$ die Maxima und Minima gemein und ähnelt ihr roh genommen.

Die Funktion $sa\,u$ wächst für rein imaginäre u zwischen 0 und iK' positiv imaginär monoton von 0 bis ins Unendliche. Für negativ imaginäre u ergibt sich ihre Gestalt aus der Gleichung $sa - u = -sa\,u$ und aus der Periodizität. Von der Kurve $y = -i\,sa\,ix$ macht man sich leicht eine ungefähre Zeichnung.

Die Funktionen $ca\,u$, $da\,u$ sind reell für rein imaginäre u und wachsen monoton von Eins ins Unendliche, wenn u von 0 bis iK' läuft.

Durchläuft u die Begrenzung eines Rechtecks von 0 bis K, bis $K+iK'$ bis iK' bis 0, so durchläuft $z=sa\,u$ die reelle Achse der z-Ebene von 0 bis 1 bis $1:k$ bis ∞ und dann die positiv imaginäre Achse von ∞ bis 0 immer monoton, und das Innere des Rechtecks $0\cdot\cdot K\cdot\cdot K+iK'\cdots-K+iK'\cdots-K\cdot\cdot 0$ bildet sich auf das Innere der Halbebene, in der der imaginäre Teil von z positiv ist, eindeutig und winkeltreu ab. Das Rechteck, von 0 bis $K\cdot\cdot K-iK'\cdots-K-iK'\cdots-K\cdot\cdot 0$ bildet sich auf das Innere der Halbebene ab, in der der imaginäre Teil von z negativ ist. Der Geraden von K bis $K+iK'$ entspricht das obere Ufer der Geraden von 1 bis $1:k$ der z-Ebene, der Geraden von K bis $K-iK'$ entspricht das untere Ufer derselben Linie. Diese beiden Rechtecke zusammen bilden sich also auf die ganze z-Ebene ab, sie vollständig bedeckend. Denn nach den Liouvilleschen Sätzen hat die Gleichung $sa\,u=z$ im ganzen Periodenparallelogramm zwei Wurzeln, von denen eine in dem besprochenen halben Rechteck liegt.

Der Rest des Periodenrechtecks $-K-iK'\cdots-iK'\cdots-iK'+K\cdot\cdot K+iK'\cdots-K+iK'\cdots-K-iK'$ bildet sich eineindeutig auf eine zweite z-Ebene ab. Durch Übereinanderlegen der beiden Ebenen und kreuzweises Zusammenfügen derselben längs der Linien von 1 bis $1:k$ und von -1 bis $-1:k$, die Durchsetzungslinien heißen, erhält man die Riemannsche Fläche, auf die sich das ganze Periodenrechteck eineindeutig abbildet.

Die Funktion $tga\,u$ wächst monoton von 0 bis ∞, wenn u von 0 bis K zunimmt, und nimmt nach der Gleichung $tga-u=-tga\,u$ monoton von 0 bis $-\infty$ ab, wenn u von 0 bis $-K$ abnimmt. Außerhalb dieser Strecke wiederholen sich diese Werte nach dem Gesetz der Periodizität. Die Kurve $y=tga\,x$ hat an der Stelle 0 einen Wendepunkt und nähert sich den unendlich fernen Punkten der Geraden $x=K$, $x=-K$ asymptotisch, für positive x dem Punkte $y=+\infty$ von $x=K$, für negative dem Punkte $y=-\infty$ für $x=-K$. Da $tga'\,x$ fortwährend wächst, wenn x von 0 bis ∞ zunimmt, so wendet sie ihre hohle Seite der y-Achse zu.

Für rein imaginäre Werte iu setze man $tga(iu,k)=i\,sa(u,k')$. Daraus ergibt sich, daß die Kurve $y=-i\,tga\,ix$ eine Wellenlinie ist. Die Kurve $y=ja\,x$ ist eine Wellenlinie, deren Maxima und Minima $y=\pm 1$ sind. Für rein imaginäre u ist $ja\,u$ rein imaginär.

XVIII. Verlauf der Funktionen $sa\,u\;ca\,u\;da\,u$ für positiv imaginäre k.

Ist $iK'=iK''+K$, so ist

$$q=e^{i\pi(iK''+K):K}=e^{-\pi(K'':K)+i\pi}=-e^{-\pi K'':K},\qquad \sqrt[4]{q}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i)\,e^{-\pi K'':4K}.$$

Die Thetafunktionen $\Theta(u)\,\Theta_{01}(u)$ sind in diesem Falle für reelle oder rein imaginäre u reell, $\Theta_{10}(u)$ spaltet sich für eben solche u in einen reellen uud den komplexen Faktor $(1+i)$. $\Theta_{11}(u)$ spaltet sich für reelle u ebenfalls in einen reellen und den Faktor $1+i$, für rein imaginäre u aber in den Faktor $i(1+i)=i-1$ und einen reellen Faktor. Der Faktor $1+i$ hebt sich in $sa\,u\;ca\,u$ fort, in $da\,u$ kommt er gar nicht vor.

Die Funktion $sa\,u$ wächst von 0 bis 1 monoton wenn u von 0 bis K zunimmt, und die Kurve $y=sa\,x$ ähnelt der für reelle k zwischen 0 und 1, mit der sie die Maxima und Minima und das Vorzeichen gemein hat.

Die Funktion $ca\,u$ nimmt monoton von 1 bis 0 ab, wenn u von 0 bis K zunimmt, und die Kurve $y=ca\,x$ ähnelt der für reelle k, $0<k<1$, und hat mit ihr die Maxima und Minima und das Vorzeichen gemein.

Die Funktion $da\,u$ wächst von 1 bis k' monoton, $(k'>1)$, wenn u von 0 bis K zunimmt, und hat einen der entsprechenden Kurve für $0<k<1$ insofern entgegengesetzten Verlauf, als die erste da ansteigt, wo die zweite absteigt.

Für andere reelle Werte von u ergibt sich der Verlauf aus den Gleichungen X 6, 7.

Für rein imaginäre u wächst $sa\,u$ von 0 bis $-1:k=i:h\,(k=ih)$ monoton, wenn u von 0 bis iK'' monoton zunimmt $(sa\,iK''=sa\,(iK'-K)=-1:k)$. In demselben Intervalle wächst $ca\,u$ von 1 bis $ik':k=\sqrt{1+h^2}:h$ monoton, und $da\,u$ nimmt in diesem Intervalle monoton von 1 bis 0 ab.

Die Funktion $z=sa\,u$ nimmt in dem Rechtecke mit den Ecken 0, K, iK', iK'' jeden Wert z mit positiv reellem und positiv imaginärem Teil einmal und nur einmal an, das Rechteck bildet sich also auf eine Viertelebene winkeltreu ab, mit Ausnahme der Stelle $u=iK''$, $z=-1:k$.

XIX. Eine Transformation vierter Ordnung. Zu einer für numerische Rechnungen äußerst nützlichen Transformation vierter Ordnung gelangt man aus den Formeln unter VI. Setzt man $\vartheta_{10}^2(0,4\tau):\vartheta^2(0,4\tau)=\mathfrak{k}$, so folgt zunächst:

$$\mathfrak{k}=(1-\sqrt{k'})^2:(1+\sqrt{k'})^2,\quad \sqrt{k'}=(1-\sqrt{\mathfrak{k}}):(1+\sqrt{\mathfrak{k}}), \tag{1}$$

und wenn man $q=e^\tau$ als Funktion von $\sqrt{k}$ ansieht, so gelangt man zu der Funktionalgleichung

$$q\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1+k^2}}\right)=q^4(\sqrt{k}), \tag{2}$$

auf der die Weierstraßsche Theorie der unter XIII für q aufgestellten Reihe beruht. Für $z=-ui\pi:2K$ aber folgt weiter:

$$sa^2\left[\frac{(1+\sqrt{k'})^2u}{2},\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2\right]=\left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)^2\frac{1-da\,u}{1+da\,u}\,\frac{da\,u-k'}{da\,u+k'}, \tag{3}$$

$$sa\left(\frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2}u,\mathfrak{k}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)\frac{k^2\,sa\,u\;ca\,(u,k)}{(1+da\,u)\,(k'+da\,u)},\quad \mathfrak{k}=\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2, \tag{3a}$$

$$tga\left(\frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2}u,\mathfrak{k}\right)=\frac{1+\sqrt{k'}}{\sqrt{2}\sqrt{1+k'}}\,\frac{\sqrt{1-da\,u\cdot da\,u-k'}}{da\,u-\sqrt{k'}}, \tag{3b}$$

$$da\left(\frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2}u,\mathfrak{k}\right)=\frac{\sqrt{1+\mathfrak{k}}\cdot(da\,u+\sqrt{k'})}{\sqrt{(1+da\,u)\,(k'+da\,u)}}. \tag{3c}$$

Sind $2\mathfrak{K}$, $2i\mathfrak{K}'$ die Perioden der Funktion $sa^2(u,\mathfrak{k})$, so ist

$$\mathfrak{K}=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{k'})^2K,\quad \mathfrak{K}'=(1+\sqrt{k'})^2K',\quad \mathfrak{K}':\mathfrak{K}=4K':K. \tag{4}$$

Vertauscht man k mit k' und ersetzt u durch ui, so folgt mit Rücksicht auf die Formel XVI 2:

$$sa\,[\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k}]=i(1+\sqrt{k})^2\,sa\,u:(1+ca\,u\,da\,u-k\,sa^2u),\quad \mathfrak{k}=(1-\sqrt{k})^2:(1+\sqrt{k})^2. \tag{5}$$

Sind $2\mathfrak{K}$, $2i\mathfrak{K}'$ die Perioden der Funktion $sa^2(u,\mathfrak{k})$, so ist

$$\mathfrak{K}=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{k})^2K',\quad \mathfrak{K}'=(1+\sqrt{k})^2K,\quad \tau=-4\pi K:K', \tag{6}$$

$$\sqrt{k}\,sa\,(u+K+\tfrac{1}{2}iK')=[1+\sqrt{k}-(1-\sqrt{k})\,sa\,(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})]:[(1+\sqrt{k})+(1-\sqrt{k})\,sa\,(\tfrac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k})]. \tag{7}$$

XX. Berechnung von q, K, u, wenn die zugehörigen elliptischen Funktionen und der Modul gegeben sind. Die Logarithmentafeln für Zahlen und trigonometrische Funktionen sind in der Regel auf sieben oder weniger Stellen eingerichtet, woraus man schließen kann, daß eine Genauigkeit, die einen Wert bis in die siebente Stelle richtig angibt, für praktische Anwendungen eine genügende ist. Den Logarithmus vulgaris einer Zahl x wollen wir mit $lgv\,x$ bezeichnen. Da durch mehrfaches Aufschlagen der Logarithmen sich der Fehler vergrößern kann, so wollen wir hier Formeln geben, bei denen der Fehler, wenn direkt, ohne Logarithmen, gerechnet würde, erst in die achte Dezimale tritt.

Die Formel XIII 1 ist zur Berechnung von q in gleicher Weise brauchbar, wenn k^2 zwischen 0 und 1 liegt, als auch wenn k^2 zwischen $-\infty$ und 0 liegt, also wenn k rein imaginär ist. Da $-q(k)=q(ik:k')$ ist, oder, wenn $k=ik$ gesetzt wird, $q(ki)=-q(k:\sqrt{1+k^2})$ ist, so sieht man, daß Werten von k zwischen 0 und 1 negative Werte solcher q entsprechen, deren k zwischen 0 und $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ liegt. Beschränkt man die Reihe XIII 1 auf ihr erstes Glied, so macht man einen Fehler, der $<2q^5$ ist. Für $k=\sin 30^0=\tfrac{1}{2}$ ist nach Jacobi (Band I pag. 363) $lgv\,q=8{,}25461-10$, also $lgv\,2q^5=1{,}57408-10$, $2q^5=0{,}000\,000\,003\,75\ldots$ Man wird also bei der Berechnung von q in dem Intervalle $0<k<\tfrac{1}{2}$, bez. für $k\leq\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, sich auf das erste Glied beschränken können. Um die Berechnung logarithmisch bequem zu machen, setzt man für reelle k $\sqrt{k'}=\cos 2\beta$, für imaginäre k $\sqrt{k'}=1:\cos 2\beta$, und erhält die Formel

(1) $$q = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\beta, \quad \text{bez.} \quad q = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\beta.$$

Ist $\sin 60^0 < k < 1$, so gibt XIII 2 einen eingliedrigen Ausdruck für q'.

Für $k = \sin 30^0$ ist $lgv\,2q^4 = 3{,}22145 - 10$, $2q^4 = 0{,}000\,000\,166\ldots$, und ein Fehler, der $2q^4$ beträgt, rückt in die siebente Dezimale. Indessen dürfte auch ein solcher Fehler in praktischen Anwendungen kaum von Belang sein, zumal er immer nur als ein Pessimum angegeben wird.

Zieht man noch das zweite Glied der Reihe für q zur Berechnung heran, so erhält man für das Intervall $0 < k < \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und noch ziemlich weit darüber hinaus für q vollkommen ausreichend genaue Werte, und ebenso, wenn $\sqrt{\tfrac{1}{2}} < k < 1$ ist, vollkommen ausreichend genaue Werte für q'.

Darf man $2q^4$ vernachlässigen, so erhält man für $\sqrt{K}$ den zur logarithmischen Berechnung bequemen Ausdruck:

(2) $$\sqrt{K} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\,(1 + 2q) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} : \cos^2\beta.$$

Ist diese Vernachlässigung nicht zulässig, so liefert XIII 5 einen Ausdruck:

(2a) $$\sqrt{K} = \sqrt{2\pi}\,(1 + 2q^4) : (1 + \sqrt{k'}),$$

der noch weit über $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ hinaus eine völlig ausreichende Genauigkeit gibt, denn das vernachlässigte Glied ist von der Ordnung q^{16}.

Ist $k > \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so kann man analoge Formeln für $\sqrt{K'}$ aufstellen, die q' enthalten. — Die Formeln sind für negative q ebenso brauchbar als für positive.

Aus der Gleichung $da\,u = \sqrt{k'}\,\Theta(u) : \Theta_{01}(u)$ fließen die Beziehungen:

$$0 = (\sqrt{k'} - da\,u) + 2q(\sqrt{k'} + da\,u)\cos\frac{u\pi}{K} + 2q^4(\sqrt{k'} - da\,u)\cos\frac{2u\pi}{K} + 2q^9(\sqrt{k'} + da\,u)\cos\frac{3u\pi}{K} + \cdots$$

(3) $$\cos\frac{u\pi}{K} = \frac{1}{2q}\,\frac{da\,u - \sqrt{k'}}{da\,u + \sqrt{k'}} + q^3\,\frac{da\,u - \sqrt{k'}}{da\,u + \sqrt{k'}}\cos\frac{2u\pi}{K} - q^8\cos\frac{3u\pi}{K} + \cdots.$$

Hierin ist, wenn q positiv oder negativ reell ist, bei reellem u $(da\,u - \sqrt{k'}) : (da\,u + \sqrt{k'})$ absolut genommen kleiner als $2q$. Darf man $2q^4$ vernachlässigen, und setzt man bei positivem q $\sqrt{k'} = \cos 2\beta$, $da\,u = \cos 2\omega$, bei negativem q $\sqrt{k'} = 1 : \cos 2\beta$, $da\,u = 1 : \cos 2\omega$, so folgt daraus in beiden Fällen die für logarithmisches Rechnen bequeme Formel:

(4) $$\cos\frac{u\pi}{K} = \frac{1}{2q}\,\frac{da\,u - \sqrt{k'}}{da\,u + \sqrt{k'}} = \operatorname{ctg}^2\beta\,\frac{\cos 2\omega - \cos 2\beta}{\cos 2\omega + \cos 2\beta} = \operatorname{ctg}^2\beta\,\operatorname{tg}(\beta + \omega)\operatorname{tg}(\beta - \omega).$$

Diese Formel ist als eine vorzügliche anzusehen, wenn k, $da\,u$ genau bekannt sind und man kann aus (3) noch eine Formel von größerer Tragweite dadurch herleiten, daß man in (3) u durch $2u$ ersetzt, und dann $\cos(2u\pi : K)$ eliminiert oder eine noch größere dadurch, daß man die Transformation XIX zu Hilfe nimmt, wodurch der Fehler von der Ordnung $2q^{16}$ wird. Sind jedoch k, $da\,u$ mit Fehlern, z. B. Beobachtungsfehlern behaftet, so ist $\operatorname{ctg}^2\beta$ eine sehr große Zahl, und ein Fehler in $\operatorname{tg}(\beta + \omega)\operatorname{tg}(\beta - \omega)$ wird dadurch erheblich vergrößert. Wir stellen deshalb eine bessere Formel her, die zugleich eine größere Tragweite hat.

Jacobi gibt (Band I p. 355) die Formel:

(5) $$tga\,u = \frac{\pi}{2k'K}\left(\operatorname{tg}\frac{u\pi}{2K} - \frac{4q^2}{1+q^2}\sin\frac{u\pi}{K} + \frac{4q^4}{1+q^4}\sin\frac{2u\pi}{K} - \frac{4q^6}{1+q^6}\sin\frac{3u\pi}{K} + \cdots\right).$$

Ist $\mathfrak{k} = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$, $\mathfrak{k}' = \frac{2\sqrt{2\sqrt{k'}(1+k')}}{(1+\sqrt{k'})^2}$, $\mathfrak{K} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{k'})^2 K$, so folgt aus der Formel XIX 3b:

$$tga\left(\frac{(1+\sqrt{k'})^2 u}{2}, \mathfrak{k}\right) = \frac{1+\sqrt{k'}}{\sqrt{2}\sqrt{1+k'}}\,\frac{\sqrt{(1-da\,u)(da\,u - k')}}{da\,u - \sqrt{k'}}$$

$$= \frac{\pi}{2\mathfrak{k}'\mathfrak{K}}\left(\operatorname{tg}\frac{(1+\sqrt{k'})^2 u\pi}{4\mathfrak{K}} - \frac{4q^8}{1+q^8}\sin\frac{(1+\sqrt{k'})u\pi}{2\mathfrak{K}} + \cdots\right) = \frac{2\pi}{\mathfrak{k}'(1+\sqrt{k'})^2 K}\left(\operatorname{tg}\frac{u\pi}{K} - \frac{4q^8}{1+q^8}\sin\frac{2u\pi}{K} + \cdots\right),$$

und wenn man $2q^8$ vernachlässigen darf, und wenn man $\mathfrak{K}$ durch K ausdrückt:

$$(6)\qquad \operatorname{tg}\frac{u\pi}{K} = \frac{\sqrt[4]{k'}\,(1+\sqrt{k'})\,K}{\pi}\;\frac{\sqrt{1-da\,u\cdot da\,u-k'}}{da\,u-\sqrt{k'}}.$$

Für $k=\sin 60 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist $lgv\,q = 8{,}93347-10$ $lgv\,2q^8 = 1{,}76879-10$, $2q^8 = 0{,}000\,000\,005\,866$. Ist demnach $k<\frac{1}{2}\sqrt{3}$, oder wenn $k=ik$ ist, $k\leq\sqrt{3}$, so liegt der Fehler dieser Formel erst in der achten Dezimale, sie ist demnach hinreichend genau.

Ist $k>60^0$ oder $(k=ik)$ $k>\sqrt{3}$, und will man eine gleiche Genauigkeit erreichen, so wird die Rechnung, wenn nicht noch andere Methoden gefunden werden, weniger bequem. Man kann dann die gegebene Methode wiederholen. Da durch die Transformation vierter Ordnung ein rein imaginärer Modul in einen reellen verwandelt wird, so können wir von der weiteren Beachtung rein imaginärer k absehen. Berechnet man zuerst k und die zugehörigen elliptischen Funktionen mittels der Formeln XIX und wendet auf die so erhaltenen Größen die Formel (6) an, so wird der Fehler von der Ordnung $2q^{32}$. Für $k=\sin 89^0 = 0{,}99985$ ist $lgv\,q = 9{,}60564-10$ $lgv\,2q^{32} = 0{,}68151-13$, so daß sich der Fehler erst in der zwölften Dezimale geltend macht.

Ist k noch größer, und genügt es nicht, k einfach gleich 1 zu setzen, so kann man zur Berechnung von u die Formel XIX 5 heranziehen. Der Modul $\mathfrak{k}$ ist dann so außerordentlich klein, daß man $sa\left[\frac{1}{2}i(1+\sqrt{k})^2u,\mathfrak{k}\right]$ durch $\sin(iu:K')$ ersetzen kann. K' nähert sich dem Wert $\frac{1}{2}\pi$, wenn k sich der Eins nähert.

XXI. Die Landenschen Transformationen.

$$(1)\qquad sa[(1+k)u,\mathfrak{k}] = \frac{(1+k)\,sa\,u}{1+k\,sa^2u},\quad ca[(1+k)u,\mathfrak{k}] = \frac{ca\,u\,da\,u}{1+k\,sa^2u},\quad q(\mathfrak{k}) = \sqrt{q(k)},$$

$$da[(1+k)u,\mathfrak{k}] = \frac{1-k\,sa^2u}{1+k\,sa^2u} = \frac{1-k+da\,2u+k\,ca\,2u}{1+k+da\,2u-k\,ca\,2u} = \frac{da\,2u+k\,ca\,2u}{1+k} = \frac{1-k}{da\,2u-k\,ca\,2u},$$

$$tga[(1+k)u,\mathfrak{k}] = \frac{(1+k)\,sa\,u}{ca\,u\,da\,u} = \frac{(1+k)\,sa\,u}{sa'\,u},\quad \mathfrak{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad k=\frac{1-\mathfrak{k}'}{1+\mathfrak{k}'},\quad \left(k=e^{i\alpha},\ \mathfrak{k}=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right),$$

$$(2)\qquad sa(u,k) = 2\,sa\left(\frac{(1+k')u}{2},\frac{1-k'}{1+k'}\right):\left[1+k'+(1-k')\,sa^2\left(\frac{(1+k')u}{2},\frac{1-k'}{1+k'}\right)\right],$$

$$(3)\qquad sa[(1+k')u,\mathfrak{k}] = \frac{(1+k')\,sa\,u\,ca\,u}{da\,u},\quad ca[(1+k')u,\mathfrak{k}] = \frac{1-(1+k')\,sa^2u}{da\,u},$$

$$da[(1+k')u,\mathfrak{k}] = [1-(1-k')\,sa^2u]:da\,u,\quad \mathfrak{k} = (1-k'):(1+k'),\quad q(\mathfrak{k}) = q^2(k).$$

Die Transformation (3) verwandelt einen Modul k in einen kleineren und kann daher auch für numerische Rechnungen von Nutzen sein.

XXII. Die Zetafunktionen. Es werde $Z_{hg}(u) = \Theta'_{hg}(u):\Theta_{hg}(u) = lg'\Theta_{hg}(u)$ gesetzt, so ist

$$(1)\qquad Z_{hg}(u+2K) = Z_{hg}(u),\quad Z_{hg}(u+2iK') = Z_{hg}(u)-(i\pi:K),\quad Z_{hg}(-u) = -Z_{hg}(u),$$

$$(2)\qquad Z_{h+2\mu,g+2\nu}(u) = Z_{hg}(u),\quad Z_{hg}(u+h'iK'+g'K) = Z_{h\pm h',g\pm g'}(u)-(h'i\pi:2K),$$

$$(3)\qquad Z_{11}(u)-Z_{01}(u) = lg'\,sa\,u = \frac{ca\,u\,da\,u}{sa\,u},\quad Z_{10}(u)-Z_{01}(u) = -\frac{sa\,u\,da\,u}{ca\,u},\quad Z_{00}(u)-Z_{01}(u) = -\frac{k^2\,sa\,u\,ca\,u}{da\,u}.$$

Eine elliptische Funktion mit den Perioden $2K$, $2iK'$ und den Polen $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, den Polfaktoren $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ $(\Sigma c = 0)$ läßt sich in der Form darstellen:

$$c_1 Z_{11}(u-v_1)+c_2 Z_{11}(u-v_2)+c_3 Z_{11}(u-v_3)+\cdots+c_n Z_{11}(u-v_n).$$

Hat die Funktion mehrfache Pole, so müssen zu einer ähnlichen Darstellung noch Ableitungen der Funktion Z_{11} verwendet werden.

Jacobi bezeichnet Z_{01} schlechthin mit Z. Aus den Gleichungen (3) folgt, daß man mit einer Zetafunktion auskommen könne. Da aber die vier gleichberechtigt sind, so liegt kein Grund vor, eine zu bevorzugen. — Es folgen einige Darstellungen der Zetafunktionen.

(4) $$Z_{00}(u) = \frac{2\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{(-q)^m \sin\frac{mu\pi}{K}}{1-q^{2m}} = \frac{-2\pi}{K}\,\frac{q\sin\frac{u\pi}{K}+2q^4\sin\frac{2u\pi}{K}+3q^9\sin\frac{3u\pi}{K}+\cdots}{1+2q\cos\frac{u\pi}{K}+2q^4\cos\frac{2u\pi}{K}+2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\cdots},$$

(5) $$Z_{01}(u) = \frac{2\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{q^m \sin\frac{mu\pi}{K}}{1-q^{2m}} = \frac{2\pi}{K}\,\frac{q\sin\frac{u\pi}{K}-2q^4\sin\frac{2u\pi}{K}+3q^9\sin\frac{3u\pi}{K}-\cdot+\cdots}{1-2q\cos\frac{u\pi}{K}+2q^4\cos\frac{2u\pi}{K}-2q^9\cos\frac{3u\pi}{K}+\cdot-\cdots},$$

(6) $$Z_{10}(u) = \frac{-\pi}{2K}\operatorname{tg}\frac{u\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{(-1)^m q^{2m}\sin\frac{m\pi u}{K}}{1-q^{2m}} = \frac{-\pi}{2K}\,\frac{\sin\frac{u\pi}{2K}+3q^2\sin\frac{3u\pi}{2K}+5q^6\sin\frac{5u\pi}{2K}+\cdots}{\cos\frac{u\pi}{2K}+q^2\cos\frac{3u\pi}{2K}+q^6\cos\frac{5u\pi}{2K}+\cdots},$$

(7) $$Z_{11}(u) = \frac{2K}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2K}+\frac{2\pi}{K}\mathfrak{S}\frac{q^{2m}\sin\frac{m\pi u}{K}}{1-q^{2m}} = \frac{\pi}{2K}\,\frac{\cos\frac{u\pi}{2K}-3q^2\cos\frac{3u\pi}{2K}+5q^6\cos\frac{5u\pi}{2K}-\cdots}{\sin\frac{u\pi}{2K}-q^2\sin\frac{3u\pi}{2K}+q^6\sin\frac{5u\pi}{2K}-\cdots}.$$

XXIII. Addition und Hälftung des Argumentes der Zetafunktionen. Die Funktion $Z_{hg}(u+v) - Z_{hg}(u)$ ist eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung mit den Perioden $2K$, $2iK'$. Mittelst der Liouvilleschen Sätze (XIV) gewinnt man die Formeln, von denen die zweite Jacobi gibt:

(1) $$Z_{00}(u+v) = Z_{00}(u)+Z_{00}(v)+k^2k'^2\frac{sa\,u\;sa\,v\;sa(u+v)}{da\,u\;da\,v\;da(u+v)},\quad Z_{00}(u) = 2Z_{00}(\tfrac12 u)+k^2k'^2\frac{sa^2\tfrac12 u\;sa\,u}{da^2\tfrac12 u\;da\,u},$$

(2) $$Z_{01}(u+v) = Z_{01}(u)+Z_{01}(v)-k^2\,sa\,u\;sa\,v\;sa(u+v),\quad Z_{01}(u) = 2Z_{01}(\tfrac12 u)-k^2\,sa^2\tfrac12 u\;sa\,u,$$

(3) $$Z_{10}(u+v) = Z_{10}(u)+Z_{10}(v)-k'^2\frac{sa\,u\;sa\,v\;sa(u+v)}{ca\,u\;ca\,v\;ca(u+v)},\quad Z_{10}(u) = 2Z_{10}(\tfrac12 u)-k'^2\frac{sa^2\tfrac12 u\;sa\,u}{ca^2\tfrac12 u\;ca\,u},$$

(4) $$Z_{11}(u+v) = Z_{11}(u)+Z_{11}(v)+\frac{sa^3v\;sa'u-sa^3u\;sa'v}{sa\,u\;sa\,v\,(sa^2u-sa^2v)},\quad Z_{11}(u) = 2Z_{11}(\tfrac12 u)-\frac{3-2(1+k^2)sa^2\tfrac12 u+k^2sa^4\tfrac12 u}{2\,sa\tfrac12 u\;sa'\tfrac12 u}.$$

Eine Transformation. Bedeutet $\overline{Z}_{hg}(u)$ eine Zetafunktion, die zum Modul k' oder $\overline{q} = e^{-\pi K:K'}$ gehört, so findet man aus XVI 7 die Beziehungen:

(5) $$iZ_{00}(iu) = \overline{Z}_{00}(u)+\frac{u\pi}{2KK'},\quad iZ_{11}(iu) = \overline{Z}_{11}(u)+\frac{u\pi}{2KK'},$$

(6) $$iZ_{01}(iu) = \overline{Z}_{10}(u)+\frac{u\pi}{2KK'} = \overline{Z}_{01}(u)+\frac{u\pi}{2KK'}-tga(u,k')\,da(u,k').$$

Dividiert man die beiden letzten Gleichungen XXII 3 mit u und setzt $u=0$, so folgt

(7) $$\frac{\Theta_{10}''}{\Theta_{10}}-\frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} = -1,\quad \frac{\Theta''}{\Theta}-\frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} = -k^2,\quad \frac{\Theta_{10}''}{\Theta_{10}}-\frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} = -k'^2.$$

Dividiert man (5) mit u und setzt $u=0$, und versteht unter Θ_{hg}'' die zweite Ableitung für den Argumentwert 0, so erhält man noch die Beziehung:

(8) $$-\Theta'':\Theta = \overline{\Theta}'':\overline{\Theta}+(\pi:2KK').$$

XXIV. Werttabelle der Zetafunktionen. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß

$$Z_{00}(o) = Z_{01}(o) = Z_{10}(o) = 0,\quad Z_{11}(o) = \infty$$

sei. Daraus ergibt sich ein Teil der Werte der folgenden Tabelle mit Hilfe von XXII 2. Ein anderer Teil ergibt sich aus der Hälftung des Argumentes (XXIII).

v \ $u =$		0	$\frac{1}{2}K$	K	$\frac{3}{2}K$
0	Z_{00}	0	$-\frac{(1-k')}{2}$	0	$\frac{1-k'}{2}$
	Z_{01}	0	$\frac{(1-k')}{2}$	0	$-\frac{1-k'}{2}$
	Z_{10}	0	$-\frac{1+k'}{2}$	∞	$\frac{1+k'}{2}$
	Z_{11}	∞	$\frac{1+k'}{2}$	0	$-\frac{1+k'}{2}$
$\frac{1}{2}iK'$	$Z_{00}+\frac{i\pi}{4K}$	$\frac{i(1-k)}{2}$	$-\frac{k-ik'}{2}$	$\frac{i(1+k)}{2}$	$\frac{k+ik'}{2}$
	$Z_{01}+\frac{i\pi}{4K}$	$\frac{i(1+k)}{2}$	$\frac{k+ik'}{2}$	$\frac{i(1-k)}{2}$	$-\frac{k-ik'}{2}$
	$Z_{10}+\frac{i\pi}{4K}$	$-\frac{i(1-k)}{2}$	$-\frac{k+ik'}{2}$	$-\frac{i(1+k)}{2}$	$\frac{k-ik'}{2}$
	$Z_{11}+\frac{i\pi}{4K}$	$-\frac{i(1+k)}{2}$	$\frac{k-ik'}{2}$	$-\frac{i(1-k)}{2}$	$-\frac{k+ik'}{2}$
iK'	$Z_{00}+\frac{i\pi}{2K}$	0	$-\frac{1+k'}{2}$	∞	$\frac{1+k'}{2}$
	$Z_{01}+\frac{i\pi}{2K}$	∞	$\frac{1+k'}{2}$	0	$-\frac{1+k'}{2}$
	$Z_{10}+\frac{i\pi}{2K}$	0	$-\frac{1-k'}{2}$	0	$\frac{1-k'}{2}$
	$Z_{11}+\frac{i\pi}{2K}$	0	$\frac{1-k'}{2}$	0	$-\frac{1-k'}{2}$

Die Polfaktoren sind sämtlich gleich Eins.

XXV. Die Ableitungen der Zetafunktionen. Setzt man zur Abkürzung

(1) $$E = -K\Theta_{10}'' : \Theta_{10}, \qquad E' = -K'\bar{\Theta}_{10}'' : \bar{\Theta}_{10},$$

so fließt aus XXIII 7 die Legendresche Relation:

(2) $$KE' + K'E - KK' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Für die Ableitungen der Zetafunktionen erhält man die folgenden Gleichungen:

(3) $$Z_{00}'(u) = \frac{k^2k'^2\, sa^2 u}{da^2 u} + \frac{\Theta''}{\Theta} = k^2 + \frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{k^2\, ca^2 u}{da^2 u} = \frac{\Theta''}{\Theta} - k'^2 + \frac{k'^2}{da^2 u},$$

(4) $$Z_{01}'(u) = \frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} - k^2\, sa^2 u = \frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} - 1 + da^2 u = \frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} - k^2 + k^2\, ca^2 u,$$

(5) $$Z_{10}'(u) = \frac{\Theta_{10}''}{\Theta_{10}} - \frac{k'^2\, sa^2 u}{ca^2 u} = \frac{\Theta_{10}''}{\Theta_{10}} + k'^2 - \frac{k'^2}{ca^2 u} = \frac{\Theta_{10}''}{\Theta_{10}} + 1 - \frac{da^2 u}{ca^2 u},$$

(6) $$Z_{11}'(u) = \frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} - \frac{1}{sa^2 u} = \frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} - 1 - \frac{ca^2 u}{sa^2 u}.$$

Aus XXII 3 leitet man Beziehungen zwischen den hier auftretenden Konstanten ab:

(7) $$\frac{E}{K} = 1 - \frac{\Theta_{01}''}{\Theta_{01}} = k'^2 - \frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{\Theta_{10}''}{\Theta_{10}} = \frac{\pi}{4K^2}\,\frac{\mathfrak{S}(2m-1)^2 q^{m(m-1)}}{\mathfrak{S}\, q^{m(m-1)}},$$

(8) $$Z_{00}'' = (k'^2 K - E) : K, \qquad Z_{01}'' = (K - E) : K, \qquad Z_{10}'' = -E : K.$$

Es ist

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,Z''_{00} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\left(\frac{Kk'^2-E}{K}\right) = -\frac{2\pi^2}{K^2}\,\mathfrak{S}\,m^2 q^{m^2}, \qquad \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}\,\frac{K-E}{K} = -\frac{2\pi^2}{K^2}\,\mathfrak{S}(-1)^m q^{m^2},$$

$$\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}\,\frac{K^2}{8\pi^2}\,\frac{K-E}{K} + \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\cdot\frac{K^2}{8\pi^2}\,\frac{Kk'^2-E}{K} = -\,\mathfrak{S}\,m^2 q^{4m^2} = -\,(q^4+4q^{16}+9q^{36}+\cdots). \tag{9}$$

Darf man q^4 vernachlässigen, so erhält man die Jacobische Näherungsformel:

$$E = K\sqrt{k'}\,(1+k'-\sqrt{k'}). \tag{10}$$

Addiert man zur Formel (9) noch die aus XIII 5 entspringende Gleichung:

$$\frac{1+\sqrt{k'}}{4}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}-\frac{1}{2} = q^4+q^{16}+q^{36}+\cdots,$$

so erhält man eine Gleichung zwischen E und K, in der der Fehler von der Ordnung q^{16} ist.

Durch die Gaußsche Reihe drücken sich EE' wie folgt aus:

$$E = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k^2\right) = \frac{1}{2}\pi k'^2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, k^2\right) = \frac{1}{2}\pi k'^2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, -\frac{k^2}{k'^2}\right), \quad E' = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k'^2\right). \tag{11}$$

XXVI. Die elliptischen Integrale zweiter Gattung. Die Darstellung der elliptischen Integrale zweiter Gattung durch Thetafunktionen und deren Ableitungen verfolgt zwei Zwecke. Erstens werden diese Integrale dadurch eindeutige Funktionen der Variabeln u, der Integrale erster Gattung, und es lassen sich aus dieser Darstellung wichtige Eigenschaften dieser Funktionen ablesen, zweitens will man durch diese Darstellung der numerischen Rechnung zu Hilfe kommen. Dazu wird vorausgesetzt, daß das Integral erster Gattung berechnet sei, wofür oben Formeln gegeben sind. In vielen Problemen, wofür das sphärische Pendel ein gutes Beispiel ist, treten neben den Integralen zweiter oder dritter Gattung auch die erster Gattung auf. Da also u doch berechnet werden muß, so ist damit ein Teil der Arbeit geleistet. Wir betrachten die Integrale zweiter Gattung in dem Rationalitätsbereiche, der entsteht, wenn wir

$$sa^2 u = \zeta, \quad (sa^2 u)' = 2\,sa\,u\,ca\,u\,da\,u = 2\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)} = 2\sigma \quad (\varkappa = k^2)$$

setzen. Sie besitzen nur Pole algebraischer Natur, und es gibt vier einfachste, nämlich solche, die nur einen Pol besitzen. Diese müssen auf $\zeta = 0, 1, 1:\varkappa, \infty$ fallen, und enthalten keinen neuen Parameter, wenn man von einem konstanten Faktor und einem additiven Integral erster Gattung absieht. Behalten wir zur Abkürzung für das Differential $\frac{1}{2}d\zeta:\sigma$ die Bezeichnung du bei, so gibt die Integration der Gleichungen unter XXV die Formeln:

$$Z_{00}(u) = u Z''_{10} + \int_0^u \frac{k'^2\,du}{da^2 u} = -\frac{E}{K}\,u(\sigma,\zeta) + \int_0^{(\sigma,\zeta)} \frac{\frac{1}{2}\varkappa'\,d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\,\sigma}, \quad E = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\varkappa'\,d\zeta}{(1-\varkappa\zeta)\,\sigma}, \tag{1}$$

$$\text{Pol:}\quad \zeta = 1:\varkappa, \quad \lim_{\zeta=1:\varkappa}\sqrt{1-\varkappa\zeta}\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\varkappa'\,d\zeta}{\sigma} = \sqrt{\varkappa'},$$

$$Z_{01}(u) = u Z''_{10} + \int_0^u da^2 u\,du = \frac{(K-E)u}{K} - k^2\int_0^u sa^2 u\,du = \frac{K-E}{K}\,u - \int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\varkappa\zeta\,d\zeta}{\sigma}, \quad E = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\varkappa\zeta}{\zeta(1-\zeta)}}\,d\zeta, \tag{2}$$

$$\text{Pol:}\quad \zeta = \infty, \quad \lim_{\zeta=\infty}\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\cdot\int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\varkappa\,d\zeta}{\sigma} = \sqrt{\varkappa},$$

$$Z_{10}(u) = u Z''_{00} - \int_0^u \frac{k'^2\,du}{ca^2 u} = \frac{Kk'^2-E}{K}\,u - \int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}\varkappa\,d\zeta}{(1-\zeta)\,\sigma}, \quad \text{Pol:}\quad \zeta = 1, \tag{3}$$

$$Z_{11}(u) = (u-K)Z''_{01} - \int_K^u \frac{du}{sa^2 u} = \frac{K-E}{K}(u-K) - \int_0^{(\sigma,\zeta)}\frac{\frac{1}{2}d\zeta}{\zeta\sigma}, \quad \text{Pol:}\quad \zeta = 0. \tag{4}$$

XXVII. Reduktion elliptischer Integrale zweiter Gattung auf die Hauptformen. Die Ausdrücke $\int \zeta^n du$, $\int \zeta^{-n} du$, $\int \frac{du}{(1-\zeta)^n}$, $\int \frac{du}{(1-\varkappa\zeta)^n}$ sind Integrale mit Polen algebraischer Natur, Integrale zweiter Gattung. Es kommt darauf an, sie durch rationale Funktionen des Bereiches $\sigma\zeta$ und die Integrale der vorigen Nummer darzustellen.

Durch Integration der Identität

$$d\zeta^n\sigma = (\zeta^{n+2}(3+2n)\varkappa - \zeta^{n+1}(2+2n)(1+\varkappa) + \zeta^n(2n+1))\,du$$

gelangt man zu der Rekursionsformel

$$(1)\qquad (2n+3)\varkappa\int\zeta^{n+2}du - (2n+2)(1+\varkappa)\int\zeta^{n+1}du + (2n+1)\int\zeta^n du = \zeta^n\sigma,$$

die auch für negative ganze n gültig bleibt. Sie läßt sich für positive n durch einen Ausdruck von der Form auflösen:

$$(2)\qquad \int\zeta^{n+2}du = \sigma(a_{n+1}\zeta^n + a_n\zeta^{n-1} + \cdots a_2\zeta + a_1) + a_0\varkappa\int\zeta\,du - a_1\int du.$$

Die Größen a lassen sich (Crelles Journal B. 81 p. 81) durch die Näherungszähler eines Kettenbruches darstellen. Es genüge, die Formeln für $n = 0, 1, 2, -1, -2$ anzuschreiben:

$$(3)\quad \int\zeta^2 du = \frac{\sigma}{3\varkappa} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\int\zeta\,du - \frac{1}{3\varkappa}\int du,$$

$$(4)\quad \int\zeta^3 du = \frac{\sigma}{5\varkappa}\left(\zeta + \frac{4}{3}\,\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\right) + \left(\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\right)^2 - \frac{3}{5\varkappa}\right)\int\zeta\,du - \frac{4}{5}\,\frac{1+\varkappa}{3\varkappa^2}\int du,$$

$$(5)\quad \int\zeta^4 du = \frac{\sigma}{7\varkappa}\left(\zeta^2 + \frac{6(1+\varkappa)}{5\varkappa}\zeta + \frac{4\cdot6}{3\cdot5}\left(\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\right)^2 - \frac{5}{3\varkappa}\right) + \left(\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\right)^2 - \frac{8\cdot13}{3\cdot5\cdot7}\,\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\right)\int\zeta\,du - \frac{1}{7\varkappa}\left(\frac{4\cdot6}{3\cdot5}\left(\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\right)^2 - \frac{5}{3\varkappa}\right)\int du,$$

$$(6)\quad \int\zeta\,du = \frac{\sigma}{\varkappa\zeta} + \int\frac{du}{\varkappa\zeta}, \qquad (7)\quad \int du = -\frac{\sigma}{\varkappa\zeta^2} + \frac{2(1+\varkappa)}{\varkappa}\int\frac{du}{\zeta} - \frac{3}{\varkappa}\int\frac{du}{\zeta^2}.$$

Setzen wir $g(\zeta) = \zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)$, $g'(\zeta) = 1 - 2(1+\varkappa)\zeta + 3\varkappa\zeta^2$, $\frac{1}{2}g''(\zeta) = 3\varkappa\zeta - 1 - \varkappa$, so besteht die Identität:

$$(8)\quad d(\zeta-a)^{1-n}\sigma = (\xi-a)^{-n}((5-2n)\varkappa(\zeta-a)^3 + (1-n)g''(a)(\zeta-a)^2 + (3-2n)g'(a)(\zeta-a) + (2-2n)g(a))\,du.$$

Hieraus folgen für $\zeta = 1$ und $\zeta = \frac{1}{\varkappa}$ die Rekursionsformeln:

$$(9)\qquad (3-2n)(\varkappa-1)\int\frac{du}{(\zeta-1)^{n-1}} + 2(1-n)(2\varkappa-1)\int\frac{du}{(\zeta-1)^{n-2}} + (5-2n)\varkappa\int\frac{du}{(\zeta-1)^{n-3}} = \frac{\sigma}{(\zeta-1)^{n-1}},$$

$$(10)\qquad (3-2n)\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\int\frac{du}{(\zeta\varkappa-1)^{n-1}} + 2(1-n)\frac{2-\varkappa}{\varkappa}\int\frac{du}{(\zeta\varkappa-1)^{n-2}} + \frac{5-2n}{\varkappa}\int\frac{du}{(\zeta\varkappa-1)^{n-3}} = \frac{\sigma}{(\zeta\varkappa-1)^{n-1}}.$$

XXVIII. Die Omegafunktionen. Die Funktionen

$$(1)\qquad \Omega_{hg}(u,v) = \tfrac{1}{2}\,lg\,[\Theta_{hg}(u-v) : \Theta_{hg}(u+v)]$$

sind unendlich vieldeutige Funktionen, ihr Wert ist für gegebene u, v nur bis auf ein Multiplum von $i\pi$ bestimmt. Dies muß bei den folgenden Gleichungen beachtet werden. Sind uvq reell, und ist der Logarithmand positiv, so gelten die Gleichungen für die reellen Werte der Omegafunktionen. In anderen Fällen ist das fehlende Multiplum von $i\pi$ durch besondere, z. B. Stetigkeitsbetrachtungen zu bestimmen. Es ist

$$(2)\quad \Omega_{00}(u,v) = \Omega_{00}(v,u),\quad \Omega_{01}(u,v) = \Omega_{01}(v,u),\quad \Omega_{10}(u,v) = \Omega_{10}(v,u),\quad \Omega_{11}(u,v) = \Omega_{11}(v,u) \pm \tfrac{1}{2}i\pi,$$

$$(3)\quad \Omega_{hg}(u+2K,v) = \Omega_{hg}(u,v),\quad \Omega_{hg}(u+2iK',v) = \Omega_{hg}(u,v) + (vi\pi : K),\quad \Omega_{hg}(u,v+2K) = \Omega_{hg}(u,v),$$

$$(4)\quad \Omega_{hg}(-u,v) = -\Omega_{hg}(u,v),\quad \Omega_{11}(u,v) - \Omega_{01}(u,v) = \tfrac{1}{2}\,lg\,sa\,(u-v) - \tfrac{1}{2}\,lg\,sa\,(u+v),$$

$$(5)\quad \Omega_{00}(o,v) = \Omega_{01}(o,v) = \Omega_{10}(o,v) = 0,\quad \Omega_{11}(o,v) = \pm\tfrac{1}{2}i\pi,$$

$$(6)\quad \Omega_{00}(K,v) = \Omega_{01}(K,v) = 0,\quad \Omega_{10}(K,v) = \pm\frac{i\pi}{2},\quad \Omega_{11}(K,v) = 0,$$

(7) $\Omega_{01}(iK', v) = (i\pi v : 2K) \pm \frac{1}{2} i\pi, \quad \Omega_{01}(K + iK', v) = i\pi v : 2K, \quad \Omega_{01}(u, K + iK') = i\pi u : 2K,$

(8) $$\Omega_{01}(u+t, v) - \Omega_{01}(u, v) - \Omega_{01}(t, v) = \frac{1}{2} lg \frac{1 + k^2 sa\, u\, sa\, t\, sa\, v\, sa\, (u+t+v)}{1 - k^2 sa\, u\, sa\, t\, sa\, v\, sa\, (u+t-v)}$$
$$= \tfrac{1}{2} lg \left(1 + k^2 sa\, u\, sa\, v\, sa\, (t-v)\, sa\, (u+v)\right) : \left(1 - k^2 sa\, u\, sa\, v\, sa\, (t+v)\, sa\, (u+v)\right),$$

(9) $$\Omega_{01}(u, v+w) - \Omega_{01}(u, v) - \Omega_{01}(u, w) = \frac{1}{2} lg \frac{1 + k^2 sa\, u\, sa\, v\, sa\, w\, sa\, (v+w+u)}{1 - k^2 sa\, u\, sa\, v\, sa\, w\, sa\, (v+w-u)},$$

(10) $$\Omega_{00}(iu, iv; k) = \Omega_{00}(u, v; k') - \frac{\pi v u}{2KK'}, \quad \Omega_{00}(iu, v; k) = \Omega_{00}(u, iv; k') - \frac{\pi v u}{2KK'}.$$

In Jacobis Bezeichnung ist

(11) $$\Pi(u, v) = u Z_{01}(v) + \Omega_{01}(u, v), \quad \Pi(-u, v) = -\Pi(u, v).$$

Die folgende Formel nennt man „Vertauschung von Parameter und Argument":

(12) $$\Pi(u, v) - \Pi(v, u) = u Z_{01}(v) - v Z_{01}(u),$$

(13) $$\Pi(iu, iv + K, k) = \Pi(u, v + K', k'), \quad \Pi(iu, v + K, k) = -\Pi(u, iv + K', k'),$$

(14) $$\Omega_{00}\left(u, \frac{1}{2} K\right) = \frac{1}{2} lg \frac{da\,(u - \frac{1}{2} K)}{\sqrt{k'}}, \quad \Omega_{01}\left(u, \frac{1}{2} K\right) = \frac{1}{2} lg \frac{da\,(u + \frac{1}{2} K)}{\sqrt{k'}}.$$

XXIX. Die Ableitungen der Omegafunktionen. (Jacobis Werke, B. I, p. 538.)

(1) $$\Omega'_{01}(u, v) = -Z_{01}(v) + \frac{k^2 sa\, v\, sa'\, v\, sa^2 u}{1 - k^2 sa^2 v\, sa^2 u} = -Z_{11}(v) + \frac{sa'\, v : sa\, v}{1 - k^2 sa^2 v\, sa^2 u}$$
$$= -Z_{10}(v) + \frac{ca'\, v\, da^2 u}{ca\, v\, (1 - k^2 sa^2 v\, sa^2 u)} = -Z_{00}(v) + \frac{da'\, v\, ca^2 u}{da\, v\, (1 - k^2 sa^2 v\, sa^2 u)},$$

(2) $$\Omega'_{11}(u, v) = -Z_{01}(v) + \frac{sa\, v\, sa' v}{sa^2 u - sa^2 v} = -Z_{11}(v) + \frac{ca\, v\, da\, v\, sa^2 u}{sa\, v\, (sa^2 u - sa^2 v)}$$
$$= -Z_{11}(v) + \frac{ca' v\, ca^2 u}{ca\, v\, (sa^2 u - sa^2 v)} = -Z_{00}(v) + \frac{sa\, v\, ca\, v\, da^2 u}{da\, v\, (sa^2 u - sa^2 v)},$$

(3) $$\Omega'_{10}(u, v) = -Z_{01}(v) + \frac{sa\, v\, sa' v\, da^2 u}{ca^2 v - sa^2 u\, da^2 v} = -Z_{11}(v) + \frac{(sa' v : sa\, v)\, ca^2 u}{ca^2 v - da^2 v\, sa^2 u},$$
$$= -Z_{10}(v) + \frac{k'^2 sa\, v\, da\, v\, sa^2 u}{ca\, v\, (ca^2 v - da^2 v\, sa^2 u)} = -Z_{00}(v) + \frac{k'^2 sa\, v\, da\, v}{da\, v\, (ca^2 v - da^2 v\, sa^2 u)},$$

(4) $$\Omega'_{00}(u, v) = -Z_{01}(v) + \frac{k^2 sa\, v\, sa' v\, ca^2 u}{da^2 v - k^2 ca^2 v\, sa^2 u} = -Z_{11}(v) + \frac{(sa' v : sa\, v)\, da^2 u}{da^2 v - k^2 ca^2 v\, sa^2 u}$$
$$= -Z_{10}(v) + \frac{k'^2 (ca' v : ca\, v)}{da^2 v - k^2 ca^2 v\, sa^2 u} = -Z_{00}(v) + \frac{k'^2 (da' v : da\, v)\, sa^2 u}{da^2 v - k^2 ca^2 v\, sa^2 u}.$$

Setzt man $sa^2 u = \zeta$, $sa^2 v = a$, $du = \frac{1}{2} d\zeta : \sigma$, multipliziert mit du und integriert, so erhält man verschiedene Formen von Integralen dritter Gattung durch Ω-Funktionen dargestellt. Die verschiedenen Formen werden zu dem Zwecke benutzt, um bei Anwendungen ein reelles v oder vi zu erhalten. Ist der Parameter eines Integrales dritter Gattung komplex oder rein imaginär, so gelingt dies nicht. In den Anwendungen kommen aber komplexe Parameter meist als Paare in konjugiert imaginären Integralen vor, in diesem Falle läßt sich, wie unter Nr. XLI gezeigt wird, die Summe durch ein Integral mit reellem Parameter darstellen.

XXX. Der elliptische Rationalitätsbereich und seine Normalformen. Die rationalen Funktionen einer Variabeln $\mathfrak{z}$ bilden den natürlichen Rationalitätsbereich. Adjungiert man $\mathfrak{z}$ die Wurzel $\mathfrak{s}$ einer algebraischen Gleichung in $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{z}$, faßt die rationalen Funktionen von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{z}$ zu einem Funktionenbereich zusammen, so erhält man einen erweiterten Rationalitätsbereich, als dessen Grundgröße $\mathfrak{z}$, als dessen Adjunkte $\mathfrak{s}$ angesehen wird. Der für die doppeltperiodischen Funktionen in Betracht kommende Bereich entsteht, wenn man $\mathfrak{z}$ die Irrationalität adjungiert:

$$\mathfrak{s} = \sqrt{(A_4 \mathfrak{z}^4 + 4 A_3 \mathfrak{z}^3 + 6 A_2 \mathfrak{z}^2 + 4 A_1 \mathfrak{z} + A_0)} = \sqrt{A_4} \sqrt{\mathfrak{z} - \mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_2 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_3 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_4}$$

oder wenn $A_4 = 0$ ist

$$\mathfrak{s} = 2\sqrt{A_3}\sqrt{\mathfrak{z} - \mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_2 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_3}\,.$$

$(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})$ und $(-\mathfrak{s}, \mathfrak{z})$ heißen konjugierte Stellen des Bereiches, $\mathfrak{z} = \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_4$ bez. $\mathfrak{z} = \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \infty$ heißen Verzweigungsstellen des Bereiches, sie müssen voneinander verschieden sein. Die geringste Anzahl von Polen, die eine rationale Funktion dieses Bereiches haben kann, ist zwei, die aber zu einem Doppelpol zusammenfallen können.

Sind $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{z}'$ zwei solche rationale Funktionen des Bereiches $(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})$, daß sich $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{z}$ rational durch $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{z}'$ darstellen lassen, so ist der Bereich $(\mathfrak{s}', \mathfrak{z}')$ derselbe als der Bereich $(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})$, nur die Grundgrößen sind verschieden. Durch besondere Wahl der Größen $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{z}'$ entstehen die Normalbereiche.

Die Funktionen des Bereiches $(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})$ lassen sich eindeutig durch doppeltperiodische Funktionen, eine Grundfunktion und deren Ableitung, oder durch Thetafunktionen darstellen. Um dies zu erweisen, ist es zwar nicht notwendig, aber nützlich, die Grundgröße des Bereiches so zu bestimmen, daß die Adjunkte gewisse Normalformen erhält, die zugleich lehren, daß der Bereich nur einen charakteristischen Parameter enthält. — Wir unterscheiden drei Normalbereiche:

(σ, ζ) $\quad \sigma = \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}$ $\quad$ Riemannscher Bereich,

(s, z) $\quad s = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ $\quad$ Legendrescher Bereich,

(p', p) $\quad p' = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}$ $\quad$ Weierstraßscher Bereich.

Die beiden ersten Normalformen sind einander nahe verwandt. Die dritte läßt zwei Parameter in der Adjunkte stehen.

XXXI. Die Praxis führt noch auf zwei andere Normalformen. Der Bereich $(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})$ läßt sich unter allen Umständen durch Einführung einer Grundgröße $\mathfrak{z}'$, die mit $\mathfrak{z}$ linear zusammenhängt:

$$\mathfrak{z} = -(\alpha + \beta\mathfrak{z}') : (\gamma + \delta\mathfrak{z}'), \quad \mathfrak{z}' = -(\alpha + \gamma\mathfrak{z}) : (\beta + \delta\mathfrak{z}), \quad \alpha + \beta\mathfrak{z}' + \gamma\mathfrak{z} + \delta\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = 0$$

in jede der drei Normalformen überführen. In den Anwendungen sind die Größen $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4$ meist reell, so daß auch die $\mathfrak{k}$ entweder reell oder paarweise konjugiert imaginär sind. Sind die $\mathfrak{k}$ alle vier (paarweise konjugiert) imaginär, so muß A_4 positiv sein, wenn $\mathfrak{s}$ für reelle $\mathfrak{z}$ reelle Werte annehmen soll. Sind sie reell, oder ist nur ein Paar imaginär, so wird $\mathfrak{s}$ in bestimmten Intervallen reell sein. — Für solche Anwendungen mit numerischen Rechnungen liegt das Bedürfnis vor, die Funktionen des transformierten Bereiches durch Thetafunktionen darzustellen, die zu einem reellen Modul $k < 1$ gehören. Indessen lassen sich die Rechnungen, wie oben gezeigt, auch für ein rein imaginäres k gut durchführen, und nur wenn man die Legendreschen Tafeln benutzen will, ist der letzte Fall auszuschließen. Beachtet man die Differentialgleichungen der elliptischen Funktionen

$$sa'u = \sqrt{1 - sa^2u \cdot 1 - k^2 sa^2 u}, \quad (sa^2u)' = 2\sqrt{sa^2u \cdot 1 - sa^2u \cdot 1 - \varkappa\, sa^2 u} \quad (\varkappa = k^2),$$

$$tga'u = \sqrt{1 + tga^2u \cdot 1 + k'^2\, tga^2 u}, \quad ja'u = k'\sqrt{1 - ja^2u \cdot 1 + \frac{k^2}{k'^2} ja^2 u},$$

so findet man, wenn k reell ist, daß die beiden letzten Irrationalitäten aus zwei Paar konjugiert imaginären, bez. einem Paar reellen und einem Paar konjugiert imaginären Faktoren bestehen. Demnach wird es genügen, die Adjunkte des Bereiches auch in den beiden letzten Formen zuzulassen.

XXXII. Transformation auf den Riemannschen Bereich. Es ist die Gleichung $\alpha + \beta\zeta + \gamma\mathfrak{z} + \delta\zeta\mathfrak{z} = 0$ für die Wertepaare $\mathfrak{z} = \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_4$, $\zeta = 0, 1, 1:\varkappa, \infty$ zu erfüllen. Daraus folgen vier lineare homogene Gleichungen zwischen $\alpha\beta\gamma\delta$, deren Determinante Null sein muß, wenn sie miteinander verträglich sein sollen. Dies gibt eine Bedingung für $\varkappa$, und zwar ergibt sich für diese Zahl das Doppelverhältnis:

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2}{\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3} \cdot \frac{\mathfrak{k}_3 - \mathfrak{k}_4}{\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_4} = \frac{\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2}{\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_4} : \frac{\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3}{\mathfrak{k}_3 - \mathfrak{k}_4}\,. \tag{1}$$

Wird $\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_2 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_3 \cdot \mathfrak{z} - \mathfrak{k}_4$ angenommen, so ergibt sich:

$$(2)\qquad \mathfrak{z} = -\frac{\mathfrak{t}_1(\mathfrak{t}_2-\mathfrak{t}_4)+\mathfrak{t}_4(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_2)\zeta}{(\mathfrak{t}_4-\mathfrak{t}_2)+(\mathfrak{t}_2-\mathfrak{t}_1)\zeta}, \quad \mathfrak{s} = \frac{(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_2)(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_4)(\mathfrak{t}_2-\mathfrak{t}_4)\sqrt{(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_3)(\mathfrak{t}_2-\mathfrak{t}_4)}\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}}{((\mathfrak{t}_4-\mathfrak{t}_2)+(\mathfrak{t}_2-\mathfrak{t}_1)\zeta)^2},$$

$$(3)\qquad d\mathfrak{z}:\mathfrak{s} = d\zeta:\sqrt{(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_3)(\mathfrak{t}_4-\mathfrak{t}_2)}\cdot\sigma.$$

Unter den sechs Werten, die das Doppelverhältnis $\varkappa$ bei allen möglichen Vertauschungen der $\mathfrak{t}$ annimmt, ist mindestens eins positiv reell und kleiner als Eins, wenn die $\mathfrak{t}$ reell sind, und die Substitution selbst ist auch reell. Sind je zwei der $\mathfrak{t}$ konjugiert imaginär, so ist das Doppelverhältnis auch reell, aber die Substitution ist imaginär.

Ist $\mathfrak{s} = \sqrt{\mathfrak{z}-\mathfrak{t}_1\cdot\mathfrak{z}-\mathfrak{t}_2\cdot\mathfrak{z}-\mathfrak{t}_3}$, und sind die $\mathfrak{t}$ reell, so führt die Substitution

$$(4)\qquad \mathfrak{z}-\mathfrak{t}_1 = (\mathfrak{t}_2-\mathfrak{t}_1)\zeta$$

zum Riemannschen Bereiche.

Setzt man $\zeta = sa^2u$, $\sigma = \frac{1}{2}(sa^2u)'$, so werden die Funktionen des Bereiches eindeutig durch elliptische Funktionen ausgedrückt. Sind die $\mathfrak{t}$ reell, so dürfte die in dieser Nummer gegebene Substitution im allgemeinen die beste sein.

XXXIII. Die Reduktion des Bereiches $(\mathfrak{s}, \mathfrak{z})$ auf den Legendreschen. Läßt man in der Substitutionsgleichung $\alpha+\beta z+\gamma\mathfrak{z}+\delta z\mathfrak{z} = 0$ sich die Wertepaare entsprechen:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_4;\quad z = 1,\ -1,\ 1:k,\ -1:k,$$

so erhält man vier lineare homogene Gleichungen zwischen $\alpha\beta\gamma\delta$, deren Determinante verschwinden muß, wenn sie miteinander verträglich sein sollen. Daraus ergeben sich für k zwei einander reziproke Werte, die die Wurzeln der Gleichung sind:

$$(1)\qquad k^2(\mathfrak{t}_3-\mathfrak{t}_4)(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_2)+k((\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2-\mathfrak{t}_3-\mathfrak{t}_4)^2-(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_2)^2-(\mathfrak{t}_3-\mathfrak{t}_4)^2)+(\mathfrak{t}_3-\mathfrak{t}_4)(\mathfrak{t}_1-\mathfrak{t}_2) = 0.$$

Vertauscht man die $\mathfrak{t}$ auf alle möglichen Weisen, so ergeben sich für k^2 sechs Werte. Ist k^2 einer, so sind es die folgenden:

$$(2)\qquad k^2,\ \frac{1}{k^2},\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^4,\ \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^4,\ \left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^4,\ \left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^4.$$

Sind die $\mathfrak{t}$ reell, so gibt es unter den Werten für k immer reelle und die zugehörige Substitution ist auch reell. Es ist bemerkenswert, daß, wenn k reell ist, unter den sechs Werten immer zwei sind, deren absoluter Betrag Eins ist.

XXXIV. Der Fall zweier Paare konjugiert imaginärer $\mathfrak{t}$. Es sei $\mathfrak{t}_1 = p_1+p_1'i$, $\mathfrak{t}_2 = p_2+p_2'i$, $\mathfrak{t}_3 = p_1-p_1'i$, $\mathfrak{t}_4 = p_2-p_2'i$, wo $p_1'p_2'$ positiv sind. Dann bestimmen wir $\alpha\beta\gamma\delta$ in der Gleichung $\alpha+\beta t+\gamma\mathfrak{z}+\delta t\mathfrak{z}$ so, daß den Werten $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_4$ die Werte $t = i,\ i:h,\ -i,\ -i:h$ entsprechen. So erhält man vier lineare homogene Gleichungen, die durch passende Kombinationen von i befreit werden, und zwar die Gleichungen:

$$(1)\qquad \alpha+p_1\gamma-p_1'\delta = 0,\quad \alpha h+\gamma p_2 h-\delta p_2' = 0,\quad \beta+\gamma p_1'+\delta p_1 = 0,\quad \beta+\gamma p_2'h+\delta p_2 = 0.$$

Es muß also gleichzeitig

$$\gamma(p_1-p_2)h-\delta(p_1'h-p_2') = 0,\quad \gamma(p_1'-p_2'h)+\delta(p_1-p_2) = 0$$

sein, woraus folgt, daß h die Wurzel der (reziproken) quadratischen Gleichung ist:

$$(2)\qquad p_1'p_2'h^2-((p_1-p_2)^2+p_1'^2+p_2'^2)h+p_1'p_2' = 0,$$

deren Wurzeln stets positiv reell sind. Weiter ist

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{p_2-p_1}{p_1'-hp_2'} = \frac{p_1'h-p_2'}{h(p_1-p_2)},\quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma p_2-\delta p_1'}{\gamma p_1'+\delta p_1} = \frac{p_2p_1'h-p_1p_2'}{h(p_1^2+p_1'^2)-hp_2p_1-p_1'p_2'}$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{p_1p_2'-p_2p_1'h}{hp_1'-p_2'} = -\mu,\quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{p_1p_2'h-p_2p_1'}{p_1'-hp_2'} = \frac{p_2p_1'-hp_1p_2'}{hp_2'-p_1'} = -\nu$$

$$(3)\qquad t = -\frac{\alpha+\gamma\mathfrak{z}}{\beta+\delta\mathfrak{z}} = -\frac{\gamma}{\delta}\,\frac{\mathfrak{z}-\mu}{\mathfrak{z}-\nu} = -\frac{p_1'h-p_2'}{h(p_1-p_2)}\,\frac{\mathfrak{z}-\mu}{\mathfrak{z}-\nu},$$

Die Punkte μ und ν sind die reellen Punkte des Kreises, der sich durch die Punkte $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_4$ legen läßt. Das Quadrat des Radius dieses Kreises ist die negative Diskriminante der Gleichung (2) in h, dividiert durch $4(p_2-p_1)^2$. Setzt man $t = tga\,u$, so ist die Adjunkte des transformierten Bereiches $tga'u$, und der Bereich wird dargestellt durch elliptische Funktionen mit dem reellen Modul $k=\sqrt{1-h^2}$. Die Adjunkte zu t ist $\sqrt{1+t^2\cdot 1+h^2t^2}$.

XXXV. Der Fall zweier reeller und zweier imaginärer $\mathfrak{k}$. Wir wollen in diesem Falle die Transformation schrittweise vornehmen, nämlich voraussetzen, daß durch die Substitution $\mathfrak{z}=(\mathfrak{k}_2\mathfrak{z}'-\mathfrak{k}_1):(\mathfrak{z}'-1)$, wo $\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2$ die beiden reellen $\mathfrak{k}$ sind, die Adjunkte $\mathfrak{s}'$ auf die Form $\mathfrak{s}'=\sqrt{\mathfrak{z}'(\mathfrak{z}'^2-2p\mathfrak{z}'+p'^2)}$ gebracht ist. Die Striche an $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{z}$ lassen wir dann wieder fort. Es wird $p'>p$ sein, wenn $\mathfrak{k}_3\mathfrak{k}_4$ konjugiert imaginär sind.

Durch die reelle Substitution $\mathfrak{z}=p'(1-j):(1+j)$ geht $\mathfrak{s}$ über in $p'\sqrt{2(p'-p)}\cdot\sqrt{1-j^2\cdot 1+h^2j^2}$, wo $h^2=(p'+p):(p'-p)$ ist. Die Grundgröße j und die Adjunkte $j'=\sqrt{1-j^2\cdot 1+h^2j^2}$ bestimmt einen dem Bereiche $(\mathfrak{s},\mathfrak{z})$ identischen Bereich. Setzt man $h^2=k^2:k'^2$ und $j=ja\,u$, wo der Modul k ist, so werden die Funktionen des Bereiches eindeutig durch $ja\,u$ und $ja'u$ dargestellt. Man kann aber auch $j=sa(u,ih)$ setzen, dann drückt man die Funktionen des Bereiches durch Thetafunktionen mit einem negativ reellen q aus.

XXXVI. Reduktion des Bereiches $(\mathfrak{s},\mathfrak{z})$ auf den Weierstraßschen. Ist wenigstens eine der Zahlen $\mathfrak{k}$ reell, so kann man durch eine (reelle) lineare Substitution bewirken, daß die Adjunkte des Bereiches die Quadratwurzel aus einem Ausdruck dritten Grades wird, wofür die Formeln oben vorliegen. Dann gelangt man zum Weierstraßschen Bereiche, in dem das dem Quadrat der Grundgröße proportionale Glied in der Adjunkte Null ist, durch eine einfache Verschiebung. Man kann aber auch, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, nach einem allgemeinen Satze von Riemann (Crelles Journal Bd. 54 § 13) ohne die Gleichung $\mathfrak{s}^2=a_0\mathfrak{z}^4+4a_1\mathfrak{z}^3+6a_2\mathfrak{z}^2+4a_3\mathfrak{z}+a_4=0$ aufzulösen durch eine ein-eindeutige Transformation die Adjunkte auf die Quadratwurzel eines Ausdruckes dritten Grades reduzieren und zum Weierstraßschen Bereiche gelangen. Ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken nehmen wir $a_0=1$, $a_1=0$ an, so daß $\mathfrak{s}^2=\mathfrak{z}^4+6a_2\mathfrak{z}^2+4a_3\mathfrak{z}+a_4$ ist. Dann setzen wir $z=\mathfrak{z}^2+\mathfrak{s}$ und eliminieren $\mathfrak{z}$. Dadurch gelangen wir zu der Gleichung

$$(1)\qquad (z^2+6a_2z+a_4-2\mathfrak{s}(z+3a_2)^2)^2=16a_3^2(z-\mathfrak{s}).$$

Wenn a_3 nicht Null ist, läßt sich dieser Ausdruck durch Multiplikation mit $(z+3a_2)^2$ auf die Form bringen:

$$(2)\qquad ((z^2+6a_2z+a_4)(z+3a_2)-4a_3^2-2\mathfrak{s}(z+3a_2)^2)^2=16a_3^2z(z+3a_2)^2+16a_3^4-8a_3^2(z+3a_2)(z^2+6a_2z+a_4),$$

in der die rechte Seite vom dritten Grade ist. Setzt man nun die linke Seite gleich s^2 und betrachtet z als die Grundgröße, s als die Adjunkte des Bereiches, so ist die letztere die Quadratwurzel eines Ausdruckes dritten Grades der Grundgröße. Dabei sind s, z rationale Funktionen von $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{z}$, und es ist $\mathfrak{s}$ eine rationale Funktion von s und z, und aus der Gleichung (1) folgt, daß auch $\mathfrak{z}=\sqrt{z-\mathfrak{s}}$ eine rationale Funktion von s und z ist.

Ist $a_3=0$, so bringen wir $\mathfrak{s}$ auf die Form $\mathfrak{s}^2=1+4a\mathfrak{z}+\mathfrak{z}^4$, und gelangen durch die Substitution

$$\mathfrak{z}^2+\mathfrak{s}=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{z}+2):z,\quad 1+\mathfrak{s}=s\mathfrak{z}$$

zum Ziele. Die weitere Transformation (Fortschaffung des z proportionalen Gliedes) ist einfach.

Diese Transformation hat den Vorteil, nur noch zwei Fälle in den Anwendungen zu unterscheiden, weil eine Gleichung dritten Grades mit reellen Koeffizienten immer mindestens eine reelle Wurzel haben muß. Gleichwohl dürfte sie wegen ihrer Kompliziertheit für praktische Anwendungen nur selten in Betracht kommen, weshalb wir auf ein weiteres Eingehen verzichten. Der Bereich wird durch die Weierstraßsche Funktion $p(u)$ und ihre Ableitung eindeutig dargestellt.

XXXVII. Die Differentialgleichungen für K und K'. Die Funktion $u(\sigma,\zeta)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{(\sigma,\zeta)}d\zeta:\sigma$, $\sigma=\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}$ genügt der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \varkappa(1-\varkappa)\frac{\partial^2u}{\partial\varkappa^2}+(2\varkappa-1)\frac{\partial u}{\partial\varkappa}+\frac{1}{4}u=\sigma:4(1-\varkappa\zeta)^2,$$

und KK' genügen derselben Differentialgleichung, wenn rechts Null steht. Daraus fließt für u die Darstellungsform:

(2) $$\pi u + (2m+1)\pi K + (2n+1)\pi i K' = \frac{K'\sigma}{1-\varkappa\zeta}\int\limits_0^1 \frac{1-\varkappa\lambda}{\zeta-\lambda}\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} + \frac{iK\sigma}{1-\varkappa\zeta}\int\limits_0^\infty \frac{1-\varkappa\lambda}{\zeta-\lambda}\frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)}.$$

Weiter ergeben sich die Formeln:

(3) $$K\frac{\partial K'}{\partial\varkappa} - K'\frac{\partial K}{\partial\varkappa} = \frac{-\pi}{4\varkappa\varkappa'},\quad \frac{\pi^2}{K^2} = 4\varkappa\varkappa'\frac{\partial\tau}{\partial\varkappa} = -4\pi\varkappa\varkappa'\frac{\partial(K':K)}{\partial\varkappa}.$$

Da die reduzierte Differentialgleichung (1) durch die Gaußsche Reihe integriert wird, so ergeben sich daraus die Formeln:

(4) $$K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varkappa\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa'}\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right),\quad K(\varkappa=-1) = \sqrt{8}\,fac^2\left(\frac{1}{4}\right) : \sqrt{\pi},$$

(5) $$K' = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varkappa'\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa}\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{\varkappa'}{\varkappa}\right).$$

Von den Gleichungen

(6) $$K = \tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1, 4\varkappa\varkappa'),\qquad K' = \tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1, 4\varkappa\varkappa')$$

ist die erste gültig, solange $4\,abs\,\varkappa\varkappa' < 1$, $\Re(\varkappa) < \frac{1}{2}$, die zweite so lange $4\,abs\,\varkappa\varkappa' < 1$, $\Re(1-\varkappa) < \frac{1}{2}$ ist. K wird für $\varkappa = 1$ derart unendlich groß, daß $(lim\,\varkappa = 1)$

(7) $$lim\left(K - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,lg\,\frac{1+\sqrt{\varkappa}}{1-\sqrt{\varkappa}}\right) = 2$$

wird. Weiter ist

(8) $$E = \varkappa' K + 2\varkappa\varkappa'\frac{\partial K}{\partial\varkappa},\quad E' = \varkappa K' - 2\varkappa\varkappa'\frac{\partial K'}{\partial\varkappa},\quad KE' + K'E - KK' = \frac{1}{2}\pi.$$

XXXVIII. Die Legendreschen Funktionen $F(\varphi, k)$ und $E(\varphi, k)$. Legendre brachte das elliptische Integral erster Gattung auf seine Normalform:

(1) $$F(\varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},\quad \Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

und betrachtete sie im wesentlichen für reelle $k < 1$. Alsdann ist $F(\varphi, k) = F(\varphi)$ eine monoton wachsende Funktion, wenn φ von $-\infty$ bis $+\infty$ zunimmt. Ferner ist

(2) $$F(-\varphi) = -F(\varphi),\quad F(\tfrac{1}{2}m\pi + \varphi) = mK + F(\varphi),$$

(3) $$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) = F(\varphi),\quad (1 - k^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)\sin\varphi = \sin\varphi_1\cos\varphi_2\Delta\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1\Delta\varphi_1.$$

Jacobi setzte $\varphi = am\,u$, woraus seine Bezeichnung $sin\,am\,u$ usw. hervorgegangen ist. Hier sind überall in dieser Bezeichnung nur die Anfangsbuchstaben $s(in)a(m)u = sa\,u$, $c(os)a(m)u = ca\,u$ geschrieben, und Jacobis $\Delta\,am$ ist durch da ersetzt. Die Gudermannsche Bezeichnung $sn\,u$ ist eine ganz willkürliche.

Legendres Normalform für sein Integral zweiter Gattung ist

(4) $$E(\varphi, k) = E(\varphi) = \int\limits_0^\varphi \Delta(\varphi)\,d\varphi,$$

und es ist, wenn $\varphi = am\,u$ gesetzt wird

(5) $$KE(\varphi) - EF(\varphi) = KZ_{01}(u).$$

XXXIX. Das geometrisch arithmetische Mittel. Sind m, n positiv reelle Zahlen, und bildet man aus ihnen die Zahlenreihe

(1) $$\begin{aligned} m' &= \tfrac{1}{2}(m+n), & m'' &= \tfrac{1}{2}(m'+n'), & m''' &= \tfrac{1}{2}(m''+n'') \ldots m^{(\nu+1)} = \tfrac{1}{2}(m^{(\nu)} + n^{(\nu)}), \ldots, \\ n' &= \sqrt{mn}, & n'' &= \sqrt{m'n'}, & n''' &= \sqrt{m''n''}, \quad \ldots n^{(\nu+1)} = \sqrt{m^{(\nu)}n^{(\nu)}}, \ldots, \end{aligned}$$

so nähern sich $m^{(\nu)}$, $n^{(\nu)}$ mit wachsenden ν einer gemeinsamen Grenze μ, die von Gauß das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen m und n genannt worden ist. Gauß (Bd. III p. 352) beweist, daß

(2) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m'^2 \cos^2\varphi + n'^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m''^2 \cos^2\varphi + n''^2 \sin^2\varphi}} = \cdots = \frac{\pi}{2\mu}$$

ist, und es läßt sich deshalb der Wert dieses Integrals durch den Algorithmus des arithmetisch geometrischen Mittels auswerten. Setzt man $m = 1$, $n = k'^2 = 1 - k^2$, so findet man, daß $K = \pi : 2\mu$ ist, wenn μ das arithmetisch geometrische Mittel zwischen 1 und k'^2 ist. Eine Tafel für das arithmetisch geometrische Mittel zwischen 1 und k'^2 ist demnach sehr zur Berechnung von K, und in ähnlicher Weise von K' geeignet (Gauß Bd. III pag. 403).

Man kann auch das Integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}},$$

das man die Gaußsche Normalform des Integrals erster Gattung nennen mag, durch diese Methode auswerten. Man erhält dann $m, m', m'', \ldots, n, n', n'', \ldots$ entsprechend für die obere Grenze Werte $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ die sich einem bestimmten Werte nähern. Diese Rechnung ist jedoch nicht besonders einladend.

XL. Das überall endliche Integral u. Setzt man $sa\,u = z$, $sa'u = s$, so ist u eine Funktion von s, z, die für jede Stelle des Bereiches (s, z) bis auf ein System von Periodizitätsmoduln $4mK + 2niK'$, das additiv hinzutreten kann, bestimmt ist. Sieht man von diesem (unbestimmten) Teile ab, so erhält man die Werte:

(1) $$u = \tfrac{1}{2}K, \quad z = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}, \quad s = \frac{k'}{\sqrt{1+k'}}; \qquad u = \tfrac{3}{2}K, \quad z = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}, \quad s = -\frac{k'}{\sqrt{1+k'}},$$

$$u = \tfrac{1}{2}iK', \quad z = \frac{i}{\sqrt{k}}, \quad s = \frac{1+k}{\sqrt{k}}; \qquad u = \tfrac{3}{2}iK', \quad z = \frac{-i}{\sqrt{k}}, \quad s = \frac{1+k}{\sqrt{k}}.$$

$$u = \tfrac{1}{2}K + \tfrac{1}{2}iK', \quad z = \sqrt{\frac{k\,i\,k'}{k}}, \quad s = ik'\sqrt{\frac{k+ik'}{k}}; \quad u = \tfrac{3}{2}K + \tfrac{3}{2}iK', \quad z = \sqrt{\frac{k+ik'}{k}}, \quad s = -ik'\sqrt{\frac{k+ik'}{k}},$$

$$u = \tfrac{1}{3}K, \quad z = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{-\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{k'^4}{4k^2}}} + \sqrt{1+\alpha\sqrt[3]{\frac{k'^4}{4k^2}}} + \sqrt{1+\alpha^2\sqrt[3]{\frac{k'^4}{4k^2}}}}, \quad \alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

(2) $$u(s, z) + u(-s, z) = 2K,$$

(3) $$u(s_1, z_1) + u(s_2, z_2) = u(s, z),$$

$$z = \frac{z_1 s_2 + z_2 s_1}{1 - k^2 z_1^2 z_2^2}, \quad s = \frac{s_1 s_2 (1 + k^2 z_1^2 z_2^2) - z_1 z_2 (1 + k^2 - 2k^2(z_1^2 + z_2^2)) + k^2(1+k^2) z_1^2 z_2^2}{1 - k^2 z_1^2 z_2^2}.$$

Setzt man $sa^2 u = \zeta$, $\frac{1}{2}(sa^2 u)' = \sigma$, betrachtet u als Funktion von σ, ζ, so ist

(4) $$u(\sigma_1, \zeta_1) + u(\sigma_2, \zeta_2) = u(\sigma, \zeta)$$

$$\zeta = \frac{(\zeta_1\sigma_2 + \zeta_2\sigma_1)^2}{\zeta_1\zeta_2(1 - \varkappa\zeta_1\zeta_2)^2}, \quad \sigma = \zeta\,\frac{\sigma_1(1-\varkappa\zeta_2)^2 - \sigma_2(1-\varkappa\zeta_1)^2}{(\zeta_2 - \zeta_1)(1 - \varkappa\zeta_1\zeta_2)}.$$

XLI. Zusammenziehung zweier Integrale dritter Gattung. Im allgemeinen läßt sich die Summe zweier Integrale dritter Gattung durch Absonderung des Logarithmus einer elliptischen Funktion oder einer ebensolchen Funktion des Bereiches σ, ζ nicht in ein Integral dritter Gattung zusammenziehen. Es ist dies aber möglich, wenn die Polfaktoren der beiden Integrale einander gleich oder entgegengesetzt gleich sind. Insbesondere ist dies der Fall bei dem Integral

$$\int \frac{\frac{1}{2}d\zeta}{(A + 2B\zeta + C\zeta^2)\sigma},$$

und zwar läßt sich dies Integral, nachdem es durch Partialbruchzerlegung in zwei einfache Integrale zerlegt ist, in Integrale, die nur an zwei einander konjugierten Stellen des Bereiches (σ, ζ) unendlich groß werden, auch dann auf ein Integral mit reellem Parameter durch Absonderung eines Logarithmus zurückführen, wenn $A + 2B\zeta + C\zeta^2$

in zwei konjugiert imaginäre Faktoren zerfällt. Es ist nämlich:

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{2}\,d\,lg\,\frac{\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)+\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta-\zeta_2)+\sigma_2\zeta\zeta_1(\zeta_1-\zeta)}{\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)+\sigma_1\zeta\zeta_2(\zeta_2-\zeta)+\sigma_2\zeta\zeta_1(\zeta-\zeta_1)} = -\varkappa\,\frac{\sigma_1\zeta_2+\sigma_2\zeta_1}{1-\varkappa\zeta_1\zeta_2}\,du + \frac{\sigma_1\,du}{\zeta-\zeta_1} + \frac{\sigma_2\,du}{\zeta-\zeta_2} - \frac{\sigma_3\,du}{\zeta-\zeta_3},$$

worin

$$\text{(2)}\qquad \zeta_3 = \frac{(\sigma_1\zeta_2+\sigma_2\zeta_1)^2}{\zeta_1\zeta_2(1-\varkappa\zeta_1\zeta_2)^2},\quad \sigma = \zeta_3\,\frac{\sigma_1\zeta_2(\zeta_3-\zeta_2)+\sigma_2\zeta_1(\zeta_1-\zeta_3)}{\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)} = \zeta_3\,\frac{\sigma_1(1-\varkappa\zeta_2)^2-\sigma_2(1-\varkappa\zeta_1)^2}{(\zeta_2-\zeta_1)(1-\varkappa\zeta_2\zeta_1)}.$$

Die Integration der Formel (1) gibt die gewünschte Zusammenziehung.

Setzt man in dem Integral $\int du:(\zeta-\zeta_1)$, $\zeta_1 = sa^2 v$, $v = 2\alpha K + 2\beta i K'$, wo α β rationale Zahlen sind, so läßt sich das Integral durch ein Integral erster Gattung und den Logarithmus einer Wurzelfunktion einer elliptischen Funktion darstellen, wofür die Formel (14) in XXVIII ein Beispiel ist. Noch einfachere Fälle sind die folgenden:

$$\text{(3)}\qquad k\,ca\,u\,du = d\,arc\,sin(k\,sa\,u),\quad k\,sa\,u\,du = d\,lg(da\,u - k\,ca\,u),\quad da\,u\,du = d(am\,u) = d\,arc\,sin(sa\,u),$$

$$\text{(4)}\qquad \frac{du}{sa\,u} = \frac{1}{2}\,d\,lg\,\frac{ca\,u-da\,u}{ca\,u+da\,u},\quad k'\,tg\,u\,du = \frac{1}{2}\,d\,lg\,\frac{da\,u+k'}{da\,u-k'},\quad \frac{k'\,du}{da\,u} = d\,arc\,tg(k'\,tga\,u).$$

XLII. Logarithmen elliptischer Funktionen. Für numerische Rechnungen kann es nützlich sein, für die Logarithmen der elliptischen Funktionen unmittelbare Darstellungen zu haben, weshalb einige dahin gehörende Formeln von Jacobi hier folgen. Dabei ist nicht zu übersehen, daß die Logarithmen natürliche sind.

$$\text{(1)}\qquad lg\,sa\,u = lg\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\,sin\,\frac{u\pi}{2K}\right) + \frac{2q}{1+q}\,cos\,\frac{u\pi}{K} + \frac{2q^2}{2(1+q^2)}\,cos\,\frac{2u\pi}{K} + \frac{2q^3}{3(1+q^3)}\,cos\,\frac{3u\pi}{K} + \cdots,$$

$$\text{(2)}\qquad lg\,ca\,u = lg\left(\frac{2\sqrt[4]{q}\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\,cos\,\frac{u\pi}{2K}\right) + \frac{2q}{1-q}\,cos\,\frac{u\pi}{K} + \frac{2q^2}{2(1-q^2)}\,cos\,\frac{2u\pi}{K} + \frac{2q^3}{3(1-q^3)}\,cos\,\frac{3u\pi}{K} + \cdots,$$

$$\text{(3)}\qquad lg\,da\,u = lg\sqrt{k'} + \frac{4q}{1-q^2}\,cos\,\frac{u\pi}{K} + \frac{4q^3}{3(1-q^6)}\,cos\,\frac{3u\pi}{K} + \frac{4q^5}{5(1-q^{10})}\,cos\,\frac{5u\pi}{K} + \cdots,$$

$$\text{(4)}\qquad lg\,tga\,u = lg\left(\sqrt{k'}\,tg\,\frac{u\pi}{2K}\right) - \frac{4q}{1-q^2}\,cos\,\frac{u\pi}{K} - \frac{4q^2}{2(1-q^4)}\,cos\,\frac{2u\pi}{K} - \frac{4q^3}{3(1-q^6)}\,cos\,\frac{3u\pi}{K} - \cdots,$$

$$\text{(5)}\qquad \frac{1}{2}\,lg\,\frac{1+sa\,u}{1-sa\,u} = \frac{1}{2}\,lg\,\frac{1+sin\,\frac{u\pi}{2K}}{1-sin\,\frac{u\pi}{2K}} + \frac{4q}{1-q}\,sin\,\frac{u\pi}{2K} - \frac{4q^3}{3(1-q^3)}\,sin\,\frac{3u\pi}{2K} + \frac{4q^5}{5(1-q^5)}\,sin\,\frac{5u\pi}{2K} - \cdots,$$

$$\text{(6)}\qquad \frac{1}{2}\,lg\,\frac{1+k\,sa\,u}{1-k\,sa\,u} = \frac{4\sqrt{q}}{1-q}\,sin\,\frac{u\pi}{2K} - \frac{4\sqrt{q^3}}{3(1-q^3)}\,sin\,\frac{3u\pi}{2K} + \frac{4\sqrt{q^5}}{5(1-q^5)}\,sin\,\frac{5u\pi}{2K} - \cdots.$$

Berichtigung. Der Darstellung einer doppelt periodischen Funktion durch Zetafunktionen unter XXII ist noch eine additive Konstante hinzuzufügen.

Zweiter Teil: Anwendungen der elliptischen Funktionen.

Ein Problem, das vor andern geeignet ist, die Bedeutung der doppeltperiodischen Funktionen und die Kraft der zugehörigen Formeln für numerische Rechnungen ins Licht zu setzen, ist das Pendelproblem. Es verdiente vielmehr als das Problem der Ausmessung eines Ellipsenbogens, von dem die Funktionen elliptische heißen, zur Namengebung herangezogen zu werden. Als erste Anwendung behandeln wir daher

I. Das Kreispendel. Ein schwerer Punkt bewege sich auf einem Kreise, dessen Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $x^2 + y^2 - 2x = 0$ sein mag, wo die positive x-Achse vertikal nach oben gerichtet sein mag. Um eine Konstante zu ersparen, drücken wir die Konstante g der Schwerkraft in der Einheit des Kreisradius oder der Pendellänge aus. Mit v wird die Geschwindigkeit, mit x' ihre Komponente nach der Vertikalen bezeichnet, 2φ sei die Abweichung (Amplitude) des nach dem schweren Punkt gezogenen Kreisradius von der Vertikalen, so daß im tiefsten Punkt $\varphi = 0$ ist. Die halbe Winkelgeschwindigkeit ist φ', t die Zeit und T die Schwingungsdauer, wenn sich das Pendel nicht überschlägt. In diesem Falle gibt es eine Maximalamplitude 2α, und eine Maximalerhebung h, wo $h < 2$ ist. Der Kürze halber wollen wir eine Formel „genau" nennen, wenn der Fehler nicht mehr beträgt als eine halbe Einheit der siebenten Dezimale, so daß bei einer Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen eine größere Genauigkeit nicht zu erzielen ist. Es ist

$$\mathrm{v}^2 = 4\varphi'^2 = 2g(h-x), \quad \mathrm{v}^2 = x'x' : x(2-x), \quad x' = \sqrt{2g\cdot x\cdot \overline{h-x}\cdot \overline{2-x}}, \quad x = h\, sa^2 \sqrt{g}\, t,$$

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}h} = \sin\alpha, \quad k' = \cos\alpha = \cos^2\beta, \quad h = 1 - \cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha, \quad T = 2K : \sqrt{g},$$

$$x = 1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi, \quad \sin\varphi = k\, sa \sqrt{g}\, t, \quad \cos\varphi = da\sqrt{g}\, t, \quad \varphi' = \sqrt{g\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha-\varphi)}.$$

Ist $\alpha \leqq 30^0$, durchläuft also das Pendel einen Winkel von 120^0, so genügt zur Berechnung von q das erste Glied der Weierstraßschen Reihe und es ist $q = \frac{1}{2} tg^2 \frac{1}{2}\beta$. Nimmt man zwei Glieder der Reihe, setzt $q = \frac{1}{2} tg^2 \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{16} tg^{10} \frac{1}{2}\beta$, so ist dieser Wert von q noch genau, wenn das Pendel einen Winkel von 240^0 ($\alpha = 60^0$) durchstreicht. Ist der durchstrichene Bogen noch größer, beliebig nahe 360^0, so kann man q mittels der Formel XIII (2) berechnen, und es genügt dann wieder das erste Glied der Reihe. Da jedoch in diesem Falle zur Berechnung des Ortes aus der Zeit mittels der Gleichung $\cos\varphi = da\sqrt{g}\, t$ eine größere Anzahl von Gliedern der Thetafunktionen herangezogen werden muß, so ist es besser, dafür das ganze Formelsystem neu zu gestalten. Zur Zeit $t = \frac{1}{4}T$ ist $\cos\varphi = \sqrt{k'} = \cos\beta$, $\varphi = \beta$, $x = h : (1+k') = 2\sin^2\alpha : (1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha : \cos^2\frac{1}{2}\alpha = 4\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. Zur Berechnung der Schwingungsdauer dient die Formel XIII (5), die wir noch aufs Quadrat erheben, woraus folgt:

$$K = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{k'})^2}(1 + 4q^4 + 4q^8 + 4q^{16} + 8q^{20} + 4q^{32} + 4q^{36} + 8q^{40} + \cdots).$$

Solange $\alpha \leqq 15^0$ ist, das Pendel nicht mehr als 60^0 durchstreicht, genügt das erste Glied, und es ist $T = 2K : \sqrt{g} = \pi : \sqrt{g}\cos^4\frac{1}{2}\beta$. Nimmt man aber die drei ersten Glieder, schreibt

$$T = 4\pi\,(1+2q^4)^2 : (1+\sqrt{k'})^2\sqrt{g}, \tag{2}$$

so ist die Formel bis $\alpha = 85^0$ genau.

Um nun die Zeit zu berechnen, wenn der Ort gegeben ist, benutzen wir die Formel XX (6), aus der folgt:

$$(3) \qquad tg\,\frac{2t\pi}{T} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt[4]{k'}\,(1+\sqrt{k'})\,T\sqrt{g}\,\sqrt{(1-\cos\varphi)(\cos\varphi-\cos\alpha)}}{\cos\varphi-\cos\beta} = \frac{\sqrt{\cos\beta}\,\cos^2\frac{1}{2}\beta\,\sin\frac{1}{2}\varphi\,\sqrt{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\,\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)}\,T\sqrt{g}}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\varphi)\,\cos\frac{1}{2}(\beta-\varphi)},$$

die genau ist, mindestens bis $\alpha = 60^0$, also wenn das Pendel 240^0 durchstreicht.

Ist $\alpha > 60^0$, so setzen wir, um die Schwingungsdauer zu berechnen, $x = -h\,tga^2(i\sqrt{g}t,\ k')$, $k'^2 = 1-\frac{1}{2}h$, so ist nach XIII (2)

$$q' = e^{-\pi K:K'} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\,tg^2\frac{1}{2}\gamma, \quad k = \cos^2\gamma,$$

weil in diesem Falle das erste Glied der Reihe genügt. Weiter ist

$$-\pi K : K' = lg\,\tfrac{1}{2}\,tg^2\tfrac{1}{2}\gamma, \quad K' = 2\pi(1+4q'^4):(1+\sqrt{k})^2 = \pi(1+4q'^4):2\cos^4\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ist $\alpha > 75^0$, so kann man schreiben: $K' = \pi : 2\cos^4\frac{1}{2}\gamma$,

$$(4) \qquad \pi K = K'\,lg\,2\,ctg^2\tfrac{1}{2}\gamma, \quad T = lg\,(2\,ctg^2\tfrac{1}{2}\gamma):(1+4q'^4).$$

Für $k=1$ wird T unendlich groß. Jetzt ist die Schwingungsdauer für alle Fälle, in denen sich das Pendel nicht überschlägt, berechnet. Ist α klein, so ist $\cos^4\frac{1}{2}\beta$ sehr wenig von Eins verschieden und daher die Schwingungsdauer von der Maximalamplitude nahezu unabhängig. Es erübrigt noch für den Fall $\alpha > 60^0$ die Zeit zu berechnen, wenn der Ort gegeben ist. In diesem Falle benutzen wir die Formel XIX (5), in der $\mathfrak{k} = (1-\sqrt{k})^2 : (1+\sqrt{k})^2$ ist. Das zugehörige q ist dann sehr klein, nämlich $< 0{,}000\,000\,1044$. Setzen wir $(u = \sqrt{g}t)$

$$\frac{ca\,u\,da\,u}{1-k\,sa^2u} = \cos 2\psi, \quad \frac{(1-k)\,sa\,u}{1-k\,sa^2u} = \sin 2\psi = 2\sin\psi\cos\psi,$$

$$2\cos^2\psi = \frac{1+ca\,u\,da\,u-k\,sa^2u}{1-k\,sa^2u}, \quad tg\,\psi = \frac{(1-k)\,sa\,u}{1+ca\,u\,da\,u-k\,sa^2u},$$

so ist nach dieser Formel

$$(5) \qquad sa\left(\tfrac{1}{2}i\,(1+\sqrt{k})^2\sqrt{g}t,\ \mathfrak{k}\right) = i\,ctg^2\tfrac{1}{2}\beta\,tg\,\psi.$$

Wegen der Kleinheit von $\mathfrak{k}$ wird man

$$sa\,\tfrac{1}{2}\,(1+\sqrt{k})^2\,i\sqrt{g}t \quad \text{durch} \quad \sin\frac{(1+\sqrt{k})^2\sqrt{g}\,t\,\pi i}{4\mathfrak{K}} = \sin\frac{i\sqrt{g}\,t\,\pi}{K'}$$

ersetzen können. Zur Berechnung sind dann Tafeln, die den sinus hyperbolicus geben, nützlich.

Ist $h > 2$, überschlägt sich das Pendel, so wird die Bewegungsgleichung $x' = \sqrt{2g}\sqrt{x\,(2-x)\,(h-x)}$ durch die Gleichung

$$x = 2\,sa^2\sqrt{\tfrac{1}{2}gh}\,t, \quad k = \sqrt{2:h}, \quad \sin\varphi = sa\sqrt{\tfrac{1}{2}gh}\,t$$

integriert. Die Schwingungsdauer $T = 2K : \sqrt{\frac{1}{2}gh}$, wo K eine Funktion von $\sqrt{2:h}$ ist, bedeutet hier die Zeit eines vollen Umlaufs. Da die Formeln für die numerischen Berechnungen dieses Falles nichts prinzipiell Neues bieten, so wird von ihrer Aufstellung abgesehen. Die Rechnungen werden um so bequemer, je größer h ist, die Bewegung nähert sich dann immer mehr einer gleichförmigen.

II. Das Parabelpendel. Bewegt sich ein schwerer Punkt auf einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = 4px$ ist, wo x der Schwerkraft entgegengesetzt gerichtet ist, so wird die Bewegung durch die Gleichung bestimmt $v^2 = 2g(h-x)$, wo h das x der Ruhestelle ist, die immer existiert, wenn die Geschwindigkeit nicht unendlich groß ist. Die vertikale Komponente der Geschwindigkeit und die Integralgleichung ist

$$(1) \qquad x' = \frac{\sqrt{2gx\,(h-x)\,(p+x)}}{p+x}. \quad \sqrt{2g}\,t = \int^x \frac{p+x}{\sqrt{x\,(h-x)\,(p+x)}}\,dx.$$

Die Zeit wird durch ein Integral zweiter Gattung ausgedrückt.

Setzt man $h - x = h\,sa^2(K-u)$, $x = h\,ca^2(K-u)$, $k = \sqrt{h:(p+h)}$, so folgt $x + p = h + p - h\,sa^2(K-u)$ $= (h+p)\,da^2(K-u)$, $x = 0$ für $u = 0$, $dx = 2h\,sa(K-u)\,ca(K-u)\,da(K-u)\,du$

$$(2)\qquad \sqrt{\frac{g}{2(h+p)}}\,t = \int_0^u da^2(K-u)\,du = \int_0^u \frac{k'^2\,du}{da^2 u} = \frac{E}{K}u + Z_{00}(u).$$

Für $u = K$ ist $x = h$, $t = \frac{1}{2}T$, wenn T die Schwingungsdauer ist, diese ist demnach

$$(3)\qquad T = 2E\sqrt{2(h+p):g},$$

sie läßt sich nach den Formeln der Sammlung insbesondere leicht für kleine h berechnen. Für $h = p$ werden die elliptischen Funktionen lemniskatische. Aus dem Ort die Zeit zu berechnen, ist leicht, für die umgekehrte Aufgabe hingegen kann man keine fertigen Formeln angeben, weil die Umkehr der Integrale zweiter Gattung schwierig ist, man muß sich mit Näherungsverfahren begnügen.

Da die Rektifikation der Ellipse auf ganz gleiche Formeln führt, so mag dieselbe jetzt folgen.

III. Ausmessung des Ellipsenbogens. Ist a die große, b die kleine Halbachse einer Ellipse, die auf die rechtwinkligen Koordinaten xy bezogen ist, und ist p (die Polhöhe) den Winkel, den die Normale eines Punktes derselben mit der positiven x-Achse einschließt, und ist $k = \sqrt{\varkappa} = \sqrt{(aa - bb)}:a$ die numerische Exzentrizität, $\Delta(p) = \sqrt{1 - k^2\sin^2 p} = \sqrt{1 - \varkappa\sin^2 p}$, so hat man die Gleichungen:

$$\cos p = \frac{x}{aa} : \sqrt{\frac{xx}{a^4} + \frac{yy}{b^4}},\quad \sin p = \frac{y}{bb} : \sqrt{\frac{xx}{a^4} + \frac{yy}{b^4}},\quad tg\,p = \frac{aay}{bbx},\quad tg^2 p = \frac{a^2(a^2 - x^2)}{b^2 x^2},$$

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2 p}{\Delta^2(p)},\quad x = \frac{a\cos p}{\Delta(p)},\quad y = \frac{ak'^2\sin p}{\Delta(p)},\quad x^2 + y^2 = r^2 = \frac{a^4\cos^2 p + b^4\sin^2 p}{a^2\Delta^2(p)},$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{ak'^2\sin p}{\Delta^3(p)},\quad \frac{dy}{dp} = \frac{ak'^2\cos p}{\Delta^3(p)},\quad \frac{ds}{dp} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dp} = \frac{ak'^2\,dp}{\Delta^3(p)}.$$

Setzt man $\sin p = sa\,u$, so folgt

$$\frac{ds}{du} = \frac{ak'^2}{da^2 u},\qquad \frac{s}{a} = \frac{Eu}{K} + Z_{00}(u).$$

Der Ellipsenquadrant ist aE; er kann für kleine k, z. B. beim Erdmeridian, wo (rund) $k = \sin 4^0 41'$ $= 0{,}08164$ ist, durch einen algebraischen Ausdruck in k dargestellt werden. Denn es ist

$$E = K\sqrt{k'}\,(1 + k' - \sqrt{k'}) = 2\pi\sqrt{k'}\,(1 + k' - \sqrt{k'}) : (1 + \sqrt{k'})^2.$$

IV. Das sphärische Pendel. Ein schwerer Punkt bewegt sich auf der Kugel

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 - 1 = 0$$

unter dem Einflusse der Schwere. Man findet, daß die Bewegung zwischen zwei Parallelkreisen verläuft, der tiefere ist zur xy-Ebene genommen, der obere hat die Koordinate $z = h = a - b$. Es ist $abs\,b < a$, nur wenn die Geschwindigkeit über alle Grenzen wächst, kann $b = -a$ werden. Auch $b = a$ ist möglich, aber nur auf der unteren Halbkugel, wie überhaupt der Punkt notwendig die untere Halbkugel betritt, während dies für die obere nicht nötig ist. Setzt man

$$z = h\zeta,\quad \varkappa = (a^2 - b^2):(1 + 2ab + a^2),\quad \varkappa' = (1 + 2ab + b^2):(1 + 2ab + a^2),$$
$$e = (1 + 2ab + a^2):(a+b),\quad t = \text{tempus},$$

und ist φ die geographische Länge, so findet man (vergl. LXI 1):

$$(1)\qquad z = h\,sa^2 u = h\,sa^2(\sqrt{\tfrac{1}{2}ge}\,t),$$

$$(2)\quad d\varphi = \sqrt{\frac{1 - a^2\cdot 1 - b^2}{a+b}}\,\frac{dz}{[1 + (z-a)^2]\sqrt{z(z-h)(z-e)}} = \frac{\sqrt{1 - a^2\cdot 1 - b^2}}{h\sqrt{(a+b)e}}\left(\frac{du}{\zeta - \zeta_1} - \frac{du}{\zeta - \zeta_2}\right) = \frac{1}{i}\,\frac{\sigma_1\,du}{\zeta - \zeta_1} - \frac{1}{i}\,\frac{\sigma_2\,du}{\zeta - \zeta_2},$$

$$\zeta_1 = (a-1):h, \quad \zeta_2 = (a+1):h, \quad \sigma_2 = \sigma_1 = i\tau, \quad \tau = \sqrt{1-a^2 \cdot 1-b^2} : h\sqrt{1+2ab+a^2},$$

$$d\varphi = d \, arc\, tg \frac{\tau[\zeta^2(\zeta_1+\zeta_2)-\zeta(\zeta_1^2+\zeta_2^2)]}{\sigma\zeta_1\zeta_2(\zeta_2-\zeta_1)} + \frac{\varkappa\tau(\zeta_2-\zeta_1)\,du}{1-\varkappa\zeta_1\zeta_2} + \frac{1}{i}\frac{\sigma_3\,du}{\zeta-\zeta_3}, \tag{3}$$

$$\varphi = arc\,tg\left(\sqrt{\frac{1-a^2\cdot 1-b^2}{1+2ab+a^2}}\frac{\zeta}{\sigma}\frac{1+a^2-ah\zeta}{1-a^2}\right) + \frac{a+b}{a}\sqrt{\frac{1-a^2}{1-b^2}}\cdot\frac{u}{\sqrt{1+2ab+a^2}} + \frac{1}{i}\frac{\sigma_3\,du}{\zeta-\zeta_3}, \tag{4}$$

$$\zeta_3 = \frac{1+2ab+a^2}{a^2(1-b^2)}, \quad \sigma_3 = \frac{ib(1+ab)\sqrt{1-a^2}\sqrt{1+2ab+a^2}}{a^2(1-b^2)\sqrt{1-b^2}}.$$

Die Wurzeln sind durchgehend positiv zu nehmen.

Der Fall $b=0$ ist deshalb besonders interessant, weil für ihn $\sigma_3 = 0$ ist, also das Integral dritter Gattung ganz herausfällt. Es ist dann $\varkappa = a^2:(1+a^2)$

$$\varphi = \sqrt{\frac{1-a^2}{1+a^2}}u + arc\,tg\sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}\frac{\zeta(1-\varkappa\zeta)}{\sigma}, \quad tg\left(\varphi - \sqrt{\frac{1-a^2}{1+a^2}}u\right) = \sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}\frac{sa\,u\,da\,u}{ca\,u}. \tag{5}$$

Setzt man $\varphi - \sqrt{\frac{1-a^4}{2a}}gt = \varphi - \sqrt{\frac{1-a^2}{1+a^2}}u = \psi$, so ist ψ der Winkel in bezug auf ein sich in der xy-Ebene mit konstanter Geschwindigkeit drehendes Koordinatensystem $\xi\eta z$, und die Projektion in die Horizontalebene hat in diesem Koordinatensystem die Gleichungen:

$$\xi = \sqrt{1-a^2}\,ca\,u, \quad \eta = \sqrt{1+a^2}\,sa\,u\,da\,u,$$

$$\frac{a}{1-a^2}\xi^4 + \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0, \tag{6}$$

oder

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a^2}}\xi^2 - z + a\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a^2}}\xi^2 + z - a\right) = 0. \tag{6a}$$

Da $z-a$ negativ ist, so kommt nur der zweite Faktor in Betracht, und es ist deshalb die (relative) Trajektorie der Schnitt der Kugel mit dem parabolischen Zylinder

$$\sqrt{a}\,\xi^2 = \sqrt{1-a^2}\,(a-z).$$

Die Länge, um die der Punkt vorrückt, wenn er vom tiefsten bis zum höchsten Punkte (oder umgekehrt) sich bewegt, sei Φ, so ist (in Gauß' Bezeichnung):

$$\Phi = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1-a^2}{1+a^2}}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{a^2}{1+a^2}\right) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\sqrt{1-2\varkappa}\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varkappa\right). \tag{7}$$

Die Terme der F-Reihe sind sämtlich positiv. Setzt man $\sqrt{1-2\varkappa} = 1 - \varkappa - a_2\varkappa^2 - a_3\varkappa^3 \ldots$, so sind die $a_2 a_3 \ldots$ positiv, und $(1-\varkappa)F$ ist von der Form

$$1 - l_1\varkappa - l_2\varkappa^2 - l_3\varkappa^3 - \cdots,$$

worin die $l_1 l_2 \ldots$ positiv sind. Deshalb ist

$$\sqrt{1-2\varkappa}\,F = 1 - l_1\varkappa - l_2\varkappa^2 \cdots - (a_2\varkappa^2 + a_3\varkappa^3 + \cdots)F$$

eine monotone Funktion von $\varkappa$ $(0 < \varkappa < \frac{1}{2})$ und ebenso von a. Aus der Betrachtung der extremen Fälle $a = 0$ und $a = 1$ findet man, daß Φ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt.

Konstruiert man (Φ = Länge, $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ = Breite) auf der Kugel die Kurve

$$\Phi = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}\right)$$

durch eine hinreichende Anzahl von Punkten, so kann man auf ihr die Punkte bestimmen, für die Φ ein rationaler Teil von π ist, und also die Fälle bestimmen, in denen die Pendelbewegung eine geschlossene ist (Schleiermacher).

Setzt man den Wert von ζ_3 in die beiden Formen

$$\zeta_3 = \frac{1+2ab+a^2}{a^2(1-b^2)} = \frac{1-(b:a)^2}{1-b^2}\frac{1}{\varkappa},$$

so erkennt man, daß er zwischen 1 und $1:\varkappa$ liegt, und da das zugehörige σ_3 positiv imaginär ist, so kann man $\zeta_3 = sa^2(K-iw)$ setzen, wo nun w positiv reell ist. Alsdann erhält man für φ den Ausdruck (8):

$$arc\,tg\sqrt{\frac{1-a^2\cdot 1-b^2}{1+2ab+a^2}}\frac{sau(1+a^2-ah\,sa^2u)}{cau\,dau} + \frac{u(a+b)\sqrt{1-a^2}}{a\sqrt{1+2ab+a^2}\sqrt{1-b^2}} - \frac{1}{2i}u Z_{00}(iw) + \frac{1}{2i}lg\frac{\Theta_{10}(iw+u)}{\Theta_{10}(iw-u)},$$

(9)
$$\Phi = \frac{1}{2}\pi + \frac{K\sqrt{(a+b)}\sqrt{1-a^2}}{a\sqrt{1+2ab+a^2}\sqrt{1-b^2}} - \frac{K}{2i}Z_{00}(iw) + \frac{1}{2}\pi.$$

Zum Vergleich setzen wir noch $b=0$, $w=K'$, dann ist $Z_{00}(iK') = -i\pi:2K$, und wir erhalten die Formel (7) wieder.

Ist w ein rationaler Teil von K', so erhält man unter dem Logarithmus eine Wurzel einer periodischen Funktion, und gelangt dann zu einer Bewegung, die auf einer mit konstanter Geschwindigkeit sich drehenden Kugel eine algebraische Kurve liefert.

V. Die sphärische Ellipse. Für Länge und Inhalt einer sphärischen Ellipse sollen hier die (elliptischen) Differentialien aufgestellt werden.

Aus den Gleichungen der sphärischen Ellipse in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = 0, \quad x^2+y^2+z^2 = 1$$

findet man, wenn $x_0 y_0 z_0$ ein Punkt der Kurve ist, die Parameterdarstellung:

(1)
$$x^2 = x_0^2 + t\sigma_{32}, \quad y^2 = y_0^2 + t\sigma_{13}, \quad z^2 = z_0^2 + t\sigma_{21},$$

wo $\sigma_{\mu\nu} = \sigma_\mu - \sigma_\nu$ ist. Daraus folgt, wenn der Punkt $x_0 y_0 z_0$ noch auf dem Kegel $\sigma_{32}^2 y^2 z^2 + \sigma_{13}^2 z^2 x^2 + \sigma_{21}^2 x^2 y^2 = 0$ angenommen wird:

(2)
$$4\,ds^2 = -\sigma_{32}\sigma_{13}\sigma_{21}\,t\,dt^2 : x_0^2 + \sigma_{32}t\cdot y_0^2 + \sigma_{13}t\cdot z_0^2 + \sigma_{21}t,$$

oder, da sich hieraus

$$\sigma_1 x_0^2 = \sigma\sigma_{32}, \quad \sigma_2 y_0^2 = \sigma\sigma_{13}, \quad \sigma_3 z_0^2 = \sigma\sigma_{21}, \quad \sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 : (\sigma_{32}\sigma_2\sigma_3 + \sigma_{13}\sigma_1\sigma_3 + \sigma_{21}\sigma_2\sigma_1)$$

ergibt, wenn man t durch σt ersetzt,

(2a)
$$4\,ds^2 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3\,t\,dt^2 : 1+\sigma_1 t\cdot 1+\sigma_2 t\cdot 1+\sigma_3 t,$$

und endlich, wenn man t durch $-1:t$ ersetzt,

(3)
$$ds = \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\,dt : t\sqrt{t-\sigma_1\cdot t-\sigma_2\cdot t-\sigma_3}.$$

Um den Inhalt zu bestimmen, führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = \cos p\cos l, \quad y = \cos p \sin l, \quad z = \sin p.$$

Der Inhalt eines unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Ecke im Nordpol ($p = 90^0$) liegt, und dort den Winkel dl hat, findet sich aus der Formel für rechtwinklig sphärische Dreiecke:

$$\cos h = ctg\,C\,ctg\,C', \quad \sin p = tg\,d\psi : tg\,dl = d\psi : dl,$$

wo $\frac{1}{2}\pi - d\psi$ der andere nicht-rechte Winkel des Dreiecks ist. Demnach ist das Flächendifferential (der sphärische Exzess):

(4)
$$dF = dl - \sin p\,dl, \quad \sin p = z = \sqrt{z_0^2 + \sigma_{21}t},$$

(5)
$$dl = \tfrac{1}{2}(x_0^2\sigma_{13} - y_0^2\sigma_{32})\,dt : (1 - z_0^2 - \sigma_{21}t)\sqrt{x_0^2 + \sigma_{32}t\cdot y_0^2 + \sigma_{13}t}.$$

Nimmt man $z_0^2 = 0$ an, so daß $x_0^2 = \sigma_2 : \sigma_{21}$, $y_0^2 = -\sigma_1 : \sigma_{21}$ wird, so folgt

(6)
$$dF = dl + \frac{\frac{1}{2}\sigma_3\,t\,dt}{(1-\sigma_{21}t)\sqrt{\sigma_{21}t(\sigma_2+\sigma_{32}\sigma_{21}t)(-\sigma_1+\sigma_{13}\sigma_{21}t)}}.$$

Diese Form wird durch eine sehr einfache Substitution auf die im Pendelproblem benutzte Normalform (σ, ζ) gebracht. Es ist aber interessant, daß durch die Substitution $\sigma_{21} t : (1 - \sigma_{21} t) = \lambda : \sigma_3$ der mit dt behaftete Ausdruck auf die Form:

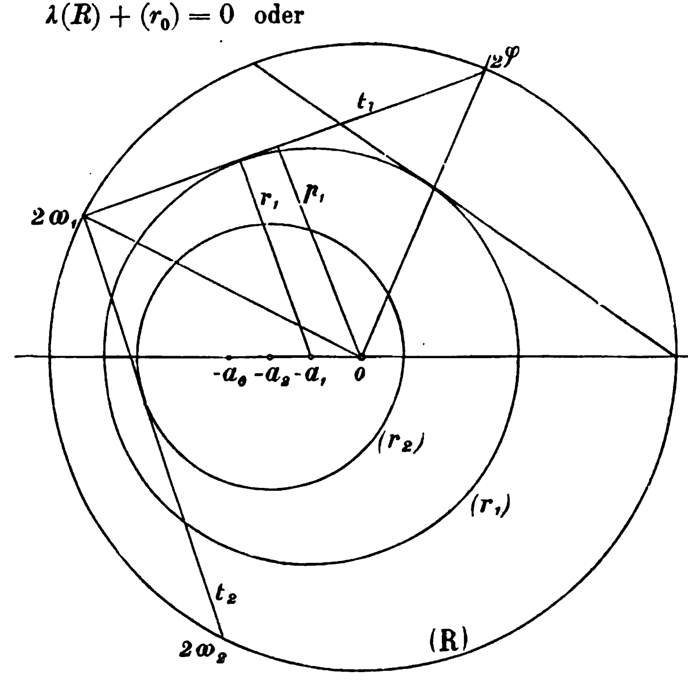
$$\tfrac{1}{2} \lambda d\lambda \sqrt{\sigma_3} : \sqrt{\sigma_2 \sigma_3 \cdot - \lambda \cdot \lambda + \sigma_1 \cdot \lambda + \sigma_2 \cdot \lambda + \sigma_3},$$

und endlich durch die Substitution $\lambda = -1 : t$ auf die von Herrn Schwarz gegebene Form:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{\sigma_2} \frac{1}{\sigma_3}}\, dt : t \sqrt{t - \frac{1}{\sigma_1} \cdot t - \frac{1}{\sigma_2} \cdot t - \frac{1}{\sigma_3}}$$

gebracht wird, die sich von der für die Kurvenlänge nur dadurch unterscheidet, daß für die σ ihre reziproken Werte stehen.

VI. Eine Eigenschaft des Kreisbüschels. Ein linearer Kreisbüschel sei in der Form gegeben $\lambda(R) + (r_0) = 0$ oder



$$x^2 + y^2 + \frac{2 a_0 x}{1 + \lambda} - \frac{\lambda R^2 - a_0^2}{1 + \lambda} = 0,$$

wobei $0 < a_0 < R$ sein mag. Das rechtwinklige Koordinatensystem gehe durch den Nullpunkt des Kreises (R) und der Winkel des Radius eines Punktes auf dem Rande des Kreises (R) mit der positiven x-Achse werde Azimut genannt. Der Mittelpunkt des zu λ gehörenden Kreises kann mit $-a_\lambda$, sein Radius mit r_λ bezeichnet werden, wir wollen jedoch den Index λ augenblicklich fortlassen. So ist

$$a = a_0 : (1 + \lambda)$$

$$r^2 = [R^2 \lambda (1 + \lambda) - \lambda a_0^2] : (1 + \lambda)^2.$$

Bezeichnen wir das Verhältnis der Potenz des Punktes $x = -R$, $y = 0$ für (r) zur Potenz des Punktes $x = R$, $y = 0$ für (r) mit k'^2, so ist nach einigen einfachen Rechnungen

$$k'^2 = [(R - a)^2 - r^2] : (R + a)^2 - r^2 = (R - a_0)^2 : (R + a_0)^2$$

eine von λ unabhängige Größe, die kleiner als 1 ist. Ist $k^2 + k'^2 = 1$, so ist

$$k^2 = 4 a R : (R + a)^2 - r^2 = 4 a_0 R : (R + a_0)^2, \qquad k'^2 = (R - a_0)^2 : (R + a_0)^2.$$

Ist $k = 0$, so sind die Kreise konzentrisch, ist $k = 1$, $(a_0 = R)$, so berühren sie sich.

VII. Tangenten an Kreise des Büschels, deren Enden auf (*R*) liegen. Im folgenden beschränken wir uns auf Kreise r, die innerhalb R liegen $0 < a < a_0$. Legen wir von einem Punkte auf (R) mit dem Azimut 2φ eine Tangente an den Kreis (r_1), so trifft sie (R) zum zweiten Male in einem Punkte, dessen Azimut $2\omega_1$ sein mag. Das Lot von 0 auf der Tangente an (r_1) werde zugleich mit seiner Größe durch p_1 gekennzeichnet und mit (p_1, x) der Winkel desselben mit der positiven x-Achse. Dann ist $(p_1, x) = \omega_1 + \varphi$, $p_1 = R \cos(\omega_1 - \varphi)$. Die Gleichung dieser Tangente t_1 in rechtwinkligen Koordinaten ist $(x + a_1) \cos(\omega_1 + \varphi) + y \sin(\omega_1 + \varphi) - r_1 = 0$. Daraus fließt

$$p_1 = -a_1 \cos(\omega_1 + \varphi) + r_1, \qquad r_1 = a_1 \cos(\omega_1 + \varphi) + p_1,$$

also ist

$$(1) \qquad r_1 = a_1 \cos(\omega_1 + \varphi) + R \cos(\omega_1 - \varphi) = (R + a_1) \cos\omega_1 \cos\varphi + (R - a_1) \sin\omega_1 \sin\varphi_1.$$

Für $\varphi = 0$ mag $\omega_1 = \psi_1$ sein, dann ist $r_1 = (R + a_1) \cos\psi_1$

$$\cos\psi_1 = \frac{r_1}{R+a_1}, \quad \sin\psi_1 = \frac{\sqrt{(R+a_1)^2 - r_1^2}}{R+a_1}, \quad \Delta\psi_1 = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi_1} = \frac{R-a_1}{R+a_1}.$$

Die Größe $\Delta\psi$ soll positiv genommen werden. Dividieren wir die Gleichung (1) durch $R+a_1$ und führen ψ_1 in dieselbe ein, so folgt:

$$\cos\psi_1 = \cos\omega_1 \cos\varphi + \sin\omega_1 \sin\varphi\,\Delta\psi_1. \tag{2}$$

Dies gibt für $\cos\omega_1$ eine quadratische Gleichung, aus deren Auflösung folgt:

$$\cos\omega_1 = (\cos\varphi\cos\psi_1 - \sin\varphi\,\Delta\varphi\,\sin\psi_1\,\Delta\psi_1) : (1 - k^2\sin^2\psi_1\sin^2\varphi). \tag{3}$$

Es gibt vom Punkte 2φ zwei Tangenten, dadurch daß wir über das Vorzeichen einer Quadratwurzel bei Auflösung der quadratischen Gleichung verfügt haben, haben wir auch dahin verfügt, daß die Tangente im Sinne der wachsenden Azimute gezogen wird. Man erkennt dies aus dem Falle $k=0$ und aus der Kontinuität.

Setzt man den gefundenen Wert von $\cos\omega_1$ in (2) ein, so findet man in eindeutiger Weise:

$$\sin\omega_1 = (\sin\varphi\cos\psi_1\,\Delta\psi_1 + \sin\psi_1\cos\varphi\,\Delta\varphi) : (1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi_1). \tag{4}$$

VIII. Jacobis Konstruktion des Additionstheorems der elliptischen Funktionen. Setzen wir $\sin\varphi = sa\,u$, $\cos\varphi = ca\,u$, $\sin\psi_1 = sa\,v_1$, $\cos\psi_1 = ca\,v_1$, so folgt aus den Gleichungen XII der Formelsammlung:

$$sa(u+v_1) = \sin\omega_1, \qquad ca(u+v_1) = \cos\omega_1,$$

und wenn man vom Punkte $2\omega_1$ eine Tangente t_2 an den Kreis (r_2) zieht, deren Endazimut $2\omega_2$ ist usw., so folgt:

$$sa(u+v_1+v_2+\cdots+v_n) = \sin\omega_n, \qquad ca(u+v_1+v_2+\cdots+v_n) = \cos\omega_n.$$

Nimmt man u und φ in gleichen Periodenquadranten an, so werden auch $u+v_1+v_2+\cdots+v_n$ und ω_n in gleichen Periodenquadranten liegen.

Wird v_n so eingerichtet, daß $v_1+v_2+\cdots+v_n = 2hK$ wird, wo h eine ganze Zahl ist, so ist

$$sa(u+v_1+v_2+\cdots+v_n) = sa(u+2hK) = (-1)^h sa\,u = \sin\omega_n = (-1)^h\sin\varphi, \qquad \omega_n = \varphi + h\pi.$$

Dann fällt der Endpunkt der letzten Tangente $2\omega_n$ mit dem Ausgangspunkte 2φ zusammen. Die Bedingung dafür $v_1+v_2+\cdots+v_n = 2hK$ ist unabhängig von u oder φ, und es folgt daraus der Ponceletsche Satz:

Zieht man an n Kreise $(r_1)(r_2)\ldots(r_n)$ eines linearen Büschels Tangenten $t_1 t_2 \ldots t_n$, die ein n-Eck bestimmen, dessen Ecken auf einem Kreise (R) desselben Büschels liegen, so läßt sich dies Polygon so drehen, oder vielmehr variieren, daß seine Seiten fortwährend Tangenten an dieselben Kreise $(r_1)(r_2)\ldots(r_n)$ bleiben, und die Ecken immer auf (R) liegen.

Fallen die Kreise $(r_1)(r_2)\ldots(r_n)$ zusammen, so daß $r_1 = r_2 \ldots r_n$ ist, so ergibt sich der Satz. Läßt sich einem Kreise (R) ein n-Eck-n-Seit einschreiben, das zugleich einem Kreis (r) umschrieben ist, so gibt es unendlich viele solcher Polygone, und es kann eine Ecke auf (R) willkürlich gewählt werden.

Diese Sätze lassen sich auf einen Kegelschnittbüschel übertragen.

IX. Das Poncelet-Steinersche Schließungsproblem. Welche Beziehung muß zwischen zwei sich nicht schneidenden Kreisen oder deren Bestimmungsstücken bestehen, damit sich dem einen ein n-Eck-n-Seit einschreiben läßt, das dem andern umschrieben ist.

Da in diesem Fall $v_1 = v_2 = \cdots = v_n$, $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ist, so wird der Index überflüssig und die Bedingung für die Schließung lautet $nv = 2hK$, wo h eine ganze Zahl ist, die die Zahl der Umdrehungen des Polygons um den Punkt Null angibt. Weil $v < K$ ist, so ist $nv < nK$, $h < \frac{1}{2}n$. Für ein gerades n kann h gleich $\frac{1}{2}n$ werden, doch schrumpft dann der Kreis r auf einen Punkt zusammen und die Lösung wird trivial.

Es muß also $sa\,nv = sa\,hK = 0$ werden. $sa\,nv$ läßt sich rational durch $sa\,v$ und $sa'\,v = ca\,v\,da\,v$ ausdrücken. Setzt man die erhaltene Formel gleich Null, und setzt

$$sa\,v = \frac{\sqrt{(R+a)^2 - r^2}}{R+a}, \qquad ca\,v = \frac{r}{R+a}, \qquad da\,v = \frac{R-a}{R+a}$$

in die Formel ein, so erhält man die gesuchte Bedingung zwischen R, r, a. Dabei lassen sich mannigfache kürzende Kunstgriffe anwenden.

Fürs Dreieck ist
$$\frac{r}{R+a}+\frac{r}{R-a}=1,$$
fürs Viereck:
$$\frac{r^2}{(R+a)^2}+\frac{r^2}{(R-a)^2}=1,$$
fürs Sechseck (Fuß):
$$-3(R^2-a^2)^2+4(R^2-a^2)(R^2+a^2)r^2+16a^2r^4R^2=0.$$

Hier könnte man $h=2$ setzen, käme dann aber auf ein zweimal zu durchlaufendes Dreieck.

Die Fußsche Formel für den Fall des Sechsecks wird durch Rationalisierung der folgenden gefunden:
$$r(R+a)\sqrt{2R}=r(R+a)\sqrt{R-a-r}+(R-a)(R+a+r)\sqrt{R+a-r}.$$

X. Addition und Teilung von Lemniskatenbögen. Eliminiert man aus den Gleichungen
$$x=\sqrt{2}c\,sa'u=\sqrt{2}c\,ca\,u\,da\,u,\quad y=-2c\,da'u=c\,sa\,u\,ca\,u,\quad k=\sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad q=e^{-\pi}$$
den Parameter u, so erhält man
$$r^4=2c^2(x^2-y^2),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}c\,ca\,u.$$
Die Kurve ist die Lemniskate. Es folgt
$$x=r\,da\,u,\quad y=\sqrt{\tfrac{1}{2}}r\,sa\,u,\quad ca\,u=r:\sqrt{2}c,\quad da\,u=x:r,\quad sa\,u=\sqrt{2}y:r.$$

Die Koordinaten haben die gemeinsamen Perioden $4K$, $4iK'$. Im Parallelogramm gehören zu jedem Punkte xy zwei Werte von u, nämlich u und $2iK'-u$, was mit dem Geschlecht der Kurve (Null) zusammenhängt, aber zu jedem reellen Punkt gehört nur ein reelles u innerhalb der Periode $4K$. — Der Parameter u hat eine geometrische Bedeutung. Es ist nämlich
$$ds^2=dx^2+dy^2=\left[(sa''u)^2+\left(\frac{da''u}{k}\right)^2\right]2c^2du^2=c^2du^2,\quad u=\frac{s}{c}.$$

Der Bogen wird von dem Punkte aus gemessen, wo die Lemniskate die positive x-Achse schneidet, $x=\sqrt{2}c$, $y=0$. Die Länge des Lemniskatenquadranten ist
$$Kc=\tfrac{1}{2}c\pi(1+e^{-\pi}+e^{-4\pi}+e^{-9\pi}\ldots)^2.$$

Ist ϱ der Radius vector und ξ die Abszisse der Mitte dieses Bogens, so ist
$$\varrho=\sqrt{2}c\sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{2}}:(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})}=\sqrt{2c\cdot c(\sqrt{2}-1)},\quad \xi=\varrho\,da\,\tfrac{1}{2}K=\sqrt{\tfrac{1}{2}}\varrho.$$

Diese Größen sind geometrisch konstruierbar, also auch die Mitte ist konstruierbar (mit Zirkel und Lineal). Will man die halbe Lemniskate, den Bogen $u=2K$, $s=2cK$ in drei gleiche Teile teilen, so hat man nach einer der Tabelle XI der Sammlung angehängten Formel ($\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$)
$$\sqrt{\frac{1}{2}}sa^2\frac{2K}{3}=-\sqrt{1+\frac{1}{2}}+\sqrt{1+\alpha\frac{1}{2}}+\sqrt{1+\alpha^2\frac{1}{2}}=-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{2}}$$
zu konstruieren; dieser Ausdruck ist geometrisch konstruierbar. Deshalb läßt sich die Dreiteilung der halben Lemniskate mit Zirkel und Lineal ausführen.

Ist $s(r,x,y)$ ein beliebiger von 0 anfangender Bogen, und sind ϱ, ξ, η die zu seiner Mitte gehörenden r, x, y, so ist nach XII 9
$$sa^2\frac{s}{2c}=\left(1-ca\frac{s}{c}\right):\left(1+da\frac{s}{c}\right),\quad \varrho=\sqrt{2}c\,ca\frac{s}{2c}=\sqrt{2c\cdot(r^2+\sqrt{2}cx):(r+x)}.$$

rxy sind gegebene Größen, ϱ ist geometrisch konstruierbar, ebenso ξ und η.

Sind $s_1 s_2$ zwei von 0 ausgehende Bögen, so soll $s = s_1 + s_2$ gefunden werden:

$$sa\frac{s}{c} = \left(sa\frac{s_1}{c}\,ca\frac{s_2}{c}\,da\frac{s_2}{c} + sa\frac{s_2}{c}\,ca\frac{s_1}{c}\,da\frac{s_1}{c}\right) : \left(1 - \frac{1}{2}sa^2\frac{s_1}{c}\,sa^2\frac{s_2}{c}\right).$$

Ist $r = \varrho$ gefunden, so ergibt sich aus der Lemniskatengleichung:

$$x = \varrho\sqrt{\varrho^2 + 2c^2} : 2c, \qquad y = \varrho\sqrt{2c^2 - \varrho^2} : 2c.$$

Sind die elliptischen Funktionen für $s_1 s_2$ gegeben, so kann man s nach der Jacobischen, obenstehenden Methode konstruieren, man kann aber $sa(s:c)$ auch durch die Koordinaten $r_1, x_1, y_1, r_2, x_2, y_2$ dieser Punkte darstellen, nämlich

$$sa\frac{s}{c} = \sqrt{2}\,\frac{x_1 r_1 y_2\sqrt{r_1^2 - 2y_1^2} + y_1 x_2 r_2\sqrt{r_2^2 - 2y_2^2}}{r_1^2 r_2^2 - 2y_1^2 y_2^2},$$

welcher Ausdruck geometrisch konstruierbar ist. Man kann also den Bogen s_2 auf geometrischem Wege verschieben, so daß sein Anfang auf das Ende von s_1 fällt.

Will man den so verschobenen Bogen hälften, so hälfte man den von Null ausgehenden Bogen $s_1 + s$.

Die 17-Teilung ist von Kiepert im 75. Bande des Crelleschen Journals durchgeführt.

XI. Winkeltreue Abbildung der Ellipse auf den Kreis. Sind $4K$, $2iK'$ die Perioden der Funktion $sa\,u$, deren Modul k reell und kleiner als 1 ist, so wird durch die Beziehung $z = sa\,u$ (vergl. Formel XII 11 der Sammlung) das Parallelogramm

$$-K - \tfrac{1}{2}iK' \cdots K - \tfrac{1}{2}iK' \cdots K \cdots K + \tfrac{1}{2}iK' \cdots -K + \tfrac{1}{2}iK' \cdots -K \cdots -K - \tfrac{1}{2}iK'$$

winkeltreu auf das Innere eines Kreises mit dem Radius $1:\sqrt{k}$ abgebildet, dessen Begrenzung eine Gerade l_1 von 1 bis $1:\sqrt{k}$, und eine Gerade l_2 von -1 bis $-1:\sqrt{k}$ hinzuzurechnen ist. Dem Punkte $-\frac{1}{2}iK'$ entspricht der Punkt $-i:\sqrt{k}$, und überhaupt die untere Hälfte des Kreises entspricht Punkten u mit negativ imaginärem Teil. Punkten, die einander auf verschiedenen Ufern von l_1 oder l_2 gegenüberliegen, entsprechen Punkte u von Parallelogrammseiten, die konjugiert komplex sind.

Durch die Gleichung $\zeta = \sin\frac{\pi}{2K}u$ wird dasselbe Parallelogramm (vergl. meine Elementare Funktionentheorie p. 89) winkeltreu auf eine Ellipse der ζ-Ebene abgebildet, mit den Brennpunkten ± 1, der großen Halbachse $\cos\frac{i\pi K'}{4K}$, der kleinen Halbachse $-i\sin\frac{i\pi K'}{4K}$. Der Begrenzung der Ellipse sind zwei gerade Linien λ_1 von 1 bis $\cos\frac{i\pi K'}{4K}$ und λ_2 von -1 bis $-\cos\frac{i\pi K'}{4K}$ zuzurechnen. Auf verschiedenen Ufern liegenden Punkten dieser Linien entsprechen ebenfalls konjugierte Werte von u auf der Parallelogrammbegrenzung.

Durch die Funktion

$$z = sa\frac{2K}{\pi}\arcsin\zeta$$

wird demnach das Innere der Ellipse auf das Innere des Kreises mit dem Radius $1:\sqrt{k}$ abgebildet. Der Übergang über die Linien $l_1 l_2$ und $\lambda_1\lambda_2$ ist beiderseits stetig, und es fallen diese Linien fort.

Hat die Ellipse die Halbachsen a und b, so sind diese, weil die Brennpunkte ± 1 sind, nicht unabhängig voneinander, aber ihr Verhältnis ist willkürlich. Es ist deshalb

$$\cos\frac{i\pi K'}{4K} : -i\sin\frac{i\pi K'}{4K} = \frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}} = \frac{a}{b} \qquad q = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2, \qquad \sqrt{k} = \Theta_{10} : \Theta.$$

XII. Abbildung des Rechtecks auf den Kreis. Ein Rechteck der u-Ebene mit den Ecken $-K$, K, $K + iK'$, $-K + iK'$ wird durch die Beziehung $z = sa\,u$ auf die z-Halbebene winkeltreu abgebildet, in der der imaginäre Teil von z positiv ist. Die Winkeltreue ist in den Ecken, denen die Punkte -1, $+1$, $1:k$, $-1:k$ entsprechen, aufgehoben, weil dort $sa'u$ verschwindet. Die Halbebene läßt sich durch reziproke Radii vectores winkeltreu auf das Innere eines Kreises abbilden. Setzt man

$$\zeta = \frac{i - z\sqrt{k}}{i + z\sqrt{k}} = \frac{i - \sqrt{k}\, sa\, u}{i + \sqrt{k}\, sa\, u} = \frac{i\Theta_{01}(u) - \Theta_{11}(u)}{i\Theta_{01}(u) + \Theta_{11}(u)}, \qquad z = \frac{i(1-\zeta)}{\sqrt{k}(1+\zeta)},$$

so bildet sich das Innere des Rechtecks auf das Innere des Einheitskreises ab (Schwarz). Dabei ist für

$$u = K, \quad \zeta = \frac{i - \sqrt{k}}{i + \sqrt{k}} = \frac{1-k}{1+k} + \frac{2i\sqrt{k}}{1+k}.$$

Ist ein Rechteck mit den Seiten $2K$, K' willkürlich vorgegeben, so muß man u noch einen Faktor geben, weil nicht allgemein $2K = \pi\Theta\Theta$ ist. Bedient man sich aber unmittelbar der Thetafunktionen zur Abbildung, nicht der elliptischen, so ist der Faktor unnötig. Einer besonders eleganten Behandlung ist (nach Schwarz) das Quadrat fähig, das jetzt folgt.

XIII. Winkeltreue Abbildung des Quadrates auf den Einheitskreis. Ist $iK' = iK'' + K$ und $K'' = K$, so ist $q = -e^{-\pi}$, und es können auch $2K + 2iK$, $2K - 2iK$ als Fundamentalperioden von $sa\,u$ angesehen werden. Dieselben Perioden hat die Funktion $sa\,iu$. Aus den Liouvilleschen Sätzen folgt $sa\,iu = i\,sa\,u$ (komplexe Multiplikation) und hieraus

$$sa\,iu = i\,sa\,u, \quad ca\,iu = da\,u, \quad da\,iu = ca\,u, \quad sa'u = \sqrt{1 - sa^4 u}, \quad k = i, \quad k' = \sqrt{2}.$$

Setzt man $z = sa\,u$, so durchläuft z die Geraden von -1 bis $+1$, und von $-i$ bis $+i$ monoton, wenn u bez. die Geraden von $-K$ bis $+K$, $-iK$ bis $+iK$ durchläuft. — Setzt man $u = \lambda + i\lambda$, $0 \leq \lambda \leq K$, so folgt

$$z = sa\,u = (1+i)\,sa\,\lambda\; ca\,\lambda\; da\,\lambda : (1 - sa^4\lambda) = (1+i)\,sa\,\lambda : sa'\lambda,$$

und es durchläuft z eine Gerade, die gegen die x-Achse unter dem arcus $\frac{1}{4}\pi$ ansteigt.

Setzt man $u = K + (i-1)\lambda$, und läßt λ von 0 bis K wachsen, so durchläuft u die Gerade von K bis iK, während

$$z = (1 + i\,sa^2\lambda) : (1 - i\,sa^2\lambda)$$

einen Viertelkreis von 1 bis i (Mittelpunkt 0, Radius 1) monoton durchläuft. Das Quadrat mit den Ecken K, iK, $-K$, $-iK$ bildet sich auf das Innere des Einheitskreises winkeltreu (mit Ausnahme der Ecken) und ein-eindeutig ab.

XIV. Abbildung des gleichseitigen Dreiecks auf die Halbebene. Ist $r = \sqrt[3]{1 - t^2}$ und setzt man $u = \int_0^t \frac{dt}{r^2}$, $l = \int_0^1 \frac{dt}{r^2}$, und führt nun t von 0 nach 1 um 1 negativ herum nach $+\infty$, von da auf dem obern Ufer der negativ reellen Achse der t-Ebene nach -1, um -1 negativ herum nach 0 zurück, so durchläuft u in seiner Ebene die Begrenzung eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Ecken l, $i\sqrt{3}\,l$, $-l$ sind, und dem Innern der t-Halbebene, in der der imaginäre Teil von t positiv ist, entspricht das Innere des gleichseitigen Dreiecks; dem Punkte Null entspricht der Punkt Null.

Es ist also

$$t = \sqrt{1 - r^3}, \qquad u = -\frac{3}{2}\int_1^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^3}}.$$

Nun setzen wir nach XXXV:

$$r = 1 + \sqrt{3}\,\frac{1-z}{1+z}, \qquad 1 - r^3 = -\frac{3\sqrt{3}(z-1)\left(2 + \sqrt{3} + (2-\sqrt{3})z^2\right)}{(1+z)^3}, \qquad z = \frac{\sqrt{3} + 1 - r}{\sqrt{3} - 1 + r},$$

$$dr = -\frac{2\sqrt{3}\,dz}{(1+z)^2}, \qquad u = \int_1^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^3}} = \frac{2i}{\sqrt{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}} \cdot \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 \cdot 1 - k^2 z^2}}, \qquad k = i(2 - \sqrt{3}).$$

Setzen wir zur Abkürzung $2i : \sqrt{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})} = 1 : c$, $s = \sqrt{1 - z^2 \cdot 1 - k^2 z^2}$, so folgt weiter:

$$\int_0^z \frac{dz}{s} - K = uc, \qquad z = sa(uc+K) = \frac{ca\,uc}{da\,uc},$$

$$\frac{\sqrt{3}+1-r}{\sqrt{3}-1+r} = \frac{ca\,uc}{da\,uc} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[3]{1-t^2}}{\sqrt{3}-1+\sqrt[3]{1-t^2}}.$$

Mittelst der Formel XVI 5 kann man noch den imaginären Modul in den reellen $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ transformieren.

XV. Zwei Abbildungen auf einen Kreisring. Durch die Beziehung $sa\,u = z$, $0 < k < 1$ wird das Rechteck der u-Ebene $-K-iK' \cdots K-iK' \cdots K+iK' \cdots -K+iK'$ winkeltreu auf die ganze z-Ebene abgebildet, so jedoch, daß den Parallelogrammseiten $-K-iK' \cdots K-iK'$ und $-K+iK' \cdots K+iK'$ gleichzeitig die reelle Achse von $1:k$ über ∞ bis $-1:k$ entspricht. Der Geraden $K-iK'$ bis K entspricht das untere Ufer der Linie von 1 bis $1:k$, der Strecke von K bis $K+iK'$ das obere Ufer dieser Linie. Den gegenüberliegenden Stücken im Parallelogramm entsprechen in ähnlicher Weise die beiden Ufer der Linie von -1 bis $-1:k$. Durch die Beziehung

$$t = e^{u\pi:K'}, \qquad u\pi : K' = lg\,t$$

bildet sich dasselbe Rechteck auf einen Kreisring ab, der von zwei konzentrischen Kreisen in der t-Ebene begrenzt wird. Die beiden Radien ϱ_1, ϱ_2 werden durch die Gleichungen

$$\varrho_1 = e^{-\pi K:K'}, \qquad \varrho_2 = e^{\pi K:K'}$$

bestimmt. Dabei entsprechen die beiden Parallelogrammseiten $K+iK' \cdots -K+iK'$ und $K-iK' \cdots -K-iK'$ demselben Stücke der negativ reellen Achse, das im Innern des Kreisringes liegt. Durch die Gleichung

$$z = sa\,((K':\pi)\,lg\,t)$$

wird also die von 1 bis $1:k$ und von -1 bis $-1:k$ aufgeschlitzte z-Ebene auf das Innere eines Kreisringes winkeltreu abgebildet, so daß den Ufern der Schlitze die begrenzenden Kreise entsprechen.

Schneidet man die z-Ebene durch eine gerade Strecke a von -1 bis $+1$, und eine zweite b von $i:k$ längs der imaginären Achse durch das Unendliche hindurch bis $-i:k$ auf, so ist in diesem Gebiete $s = \sqrt{1-z^2 \cdot 1+k^2z^2}$ eine eindeutige Funktion. Auf dem positiven (dem bei der Zugrichtung linken) Ufer der Linie a ist s positiv, auf dem negativen negativ reell. Auf dem positiven Ufer von b ist s negativ, auf dem negativen positiv imaginär. Um das Integral $u = \int_0^z (dz:s)$ ebenfalls eindeutig zu definieren, ziehen wir noch eine gerade Linie c von $-i:k$ bis zum Nullpunkte auf dem negativen Ufer von a und rechnen sie bei Betrachtung des Integrales u als Begrenzung. Es sei

$$\int_0^1 \frac{dz}{s} = K, \qquad \int_0^{i:k} \frac{dz}{s} = K'', \qquad \int_{i:k}^{+i\infty} \frac{dz}{s} = K,$$

wo das letzte Integral über den betreffenden Teil des negativen Ufers von b zu erstrecken ist. Auf dem negativen Ufer von c ist das Integral überall um $4K$ größer als auf dem positiven. Durch das Integral u wird die z-Ebene in die u-Ebene so abgebildet, daß der Linie a vom Punkte 0 auf dem negativen Ufer bis -1, von da dem positiven Ufer von a bis $+1$, von da dem negativen Ufer von a bis zum Punkte Null die gerade Linie von $u = -2K$ bis $u = +2K$ entspricht. Dem Punkt $i:k$ entspricht der Punkt $u = iK''$ der imaginären Achse der u-Ebene. Dem negativen Ufer von b entspricht die Gerade von iK'' bis $iK''+2K$, dem positiven die Gerade von iK'' bis $iK''-2K$. Dem negativen Ufer von c entspricht die Gerade von $iK''-2K$ bis $-2K$, dem positiven die Gerade von $iK''+2K$ bis $2K$, also c entspricht den der imaginären Achse parallelen Seiten des Parallelogrammes P mit den Ecken $-2K$, $2K$, $2K+iK'$, $-2K+iK'$, und durch die Beziehung

$$z = sa\,(u,\, ik)$$

wird das Innere des Parallelogrammes P auf das Innere der durch abc begrenzten z-Ebene winkeltreu abgebildet, die Linien ab auf die der reellen Achse parallelen Seiten desselben.

Durch die Beziehung

$$t = e^{u\pi i : 2K}, \quad u\pi i = 2K\, lg\, t$$

wird das Parallelogramm auf einen Kreisring abgebildet, und zwar die beiden der imaginären Achse parallelen Seiten auf die beiden Ufer des Stückes der negativ reellen Achse, das im Ringe liegt, dessen äußerer Radius $t = 1$, dessen innerer $t = e^{-\pi K'' : 2K}$ ist. Durch die Beziehung

$$z = sa\left(\frac{2K}{\pi i}\, lg\, t\right)$$

wird demnach die durch a, b begrenzte z-Ebene so auf den Kreisring abgebildet, daß dem Schlitz a der Kreis mit dem Radius $t = 1$, dem Schlitz b der Kreis mit dem Radius $t = e^{-\pi K'' : 2K}$ entspricht.

XVI. Das logarithmische Potential. Unter dem logarithmischen oder elektrischen Potential einer (ebenen) Platte versteht man eine Funktion U, die im Innern und bezw. am Rande den Differentialgleichungen

$$\varDelta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = o, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = o$$

Genüge leistet, wo n die Normale bedeutet, und die in einzelnen Punkten $A_1 A_2 \ldots A_n$, den Einströmungspunkten, unendlich groß wird wie

$$E_\mu\, lg\, PA_\mu, \qquad \sum E_\mu = o,$$

wo PA_μ die Entfernung eines veränderlichen Punktes P von A_μ ist. — Sie ist hierdurch bis auf eine additive Konstante, die von der Ladung abhängt, bestimmt.

Heine hat im 79. Band des Crelleschen Journals bemerkt, daß man die Aufgabe, das Potential für eine Platte mit gegebener einfach geschlossener Randbegrenzung zu finden, nachdem sie von Kirchhoff für den Kreis gelöst ist, dann lösen kann, wenn es gelingt, eine analytische Funktion herzustellen, die die Platte eineindeutig (winkeltreu) auf den Kreis abbildet. Diese Lösung läßt sich nicht unwesentlich vereinfachen, wenn man sie nicht für den Kreis, sondern für die Halbebene als geleistet ansieht.

Die Halbebene werde als die obere Halbebene der ζ-Ebene ($\zeta = \xi + \eta i$) gekennzeichnet, als der Teil der Ebene, in der η positiv ist, der von der ξ-Achse begrenzt ist. Der Punkt A_μ sei Träger der Zahl $\zeta_\mu = \xi_\mu + \eta_\mu i$ und ζ'_μ sei die konjugierte Zahl. Dann ist U der reelle Teil der Funktion

$$W = U + Vi = \sum E_\mu\, lg\, (\zeta - \zeta_\mu)(\zeta - \zeta'_\mu),$$

wenn man die additive Konstante unterdrückt.

In der Tat genügt sowohl der reelle Teil U, als der imaginäre Teil V dieser Funktion, wie die Funktionentheorie lehrt, der Differentialgleichung $\varDelta W = o$.

Da die Normale hier der η-Achse parallel ist, so folgt aus

$$\frac{dW}{d\zeta} = \sum \frac{E_\mu}{\zeta - \zeta_\mu} + \frac{E_\mu}{\zeta - \zeta'_\mu}$$

für $\eta = o$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \sum E_\mu \left(\frac{1}{\xi - \xi_\mu - \eta_\mu i} + \frac{1}{\xi - \xi_\mu + \eta_\mu i}\right) = 2 \sum \frac{E_\mu (\xi - \xi_\mu)}{(\xi - \xi_\mu)^2 + \eta_\mu^2},$$

und es ist demnach

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = \sum \frac{2 i E_\mu (\xi - \xi_\mu)}{(\xi - \xi_\mu)^2 + \eta_\mu^2}.$$

eine rein imaginäre Zahl, woraus folgt, daß

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

ist. In den Punkten A_μ wird die Funktion in der vorgeschriebenen Weise unendlich groß.

Ist nun ζ eine solche analytische Funktion von $z = x + yi$, daß ζ die ξ-Achse durchläuft, wenn z den Rand C einer Platte durchläuft, während das Innere dieser Platte eineindeutig der oberen ζ-Halbebene entspricht, so wird für diese Platte das elektrische Potential durch den reellen Teil der Funktion

$$W = \sum E_\mu \lg(\zeta(z) - \zeta(z_\mu))(\zeta(z) - \bar{\zeta}(z'_\mu))$$

bis auf eine additive Konstante gegeben. Dabei ist $\bar{\zeta}(z)$ diejenige Funktion von z, die aus $\zeta(z)$ erhalten wird, wenn man ihre Parameter durch die konjugierten ersetzt.

Daß $\Delta W = 0$ ist, ist selbstverständlich. Entwickelt man $\zeta(z)$ nach Potenzen von $z - z_\mu$, so kann in der Entwicklung wegen der vorausgesetzten Eineindeutigkeit das Glied $z - z_\mu$ nicht fehlen, und W wird im Punkte $A_\mu(z_\mu)$ unendlich groß wie $E_\mu \lg(z - z_\mu)$.

Ferner ist am Rande

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

und wenn man $dz = idn$ setzt, so wird wegen der Winkeltreue $d\zeta = id\eta$ und folglich

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dn}.$$

Der reelle Teil von $\partial W : \partial\eta$ ist Null, also auch der von $\partial W : \partial n$, so daß $\partial U : \partial n = 0$ ist und alle Bedingungen erfüllt sind. Durch die Beziehung

$$z = \int_0^\zeta (\tfrac{1}{2} d\zeta : \sigma), \quad \zeta = sa^2(z), \quad \sigma = \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)}$$

wird die obere ζ-Halbebene auf das Innere eines Rechteckes abgebildet, dessen Ecken

$$z = 0, \quad z = K, \quad z = K + iK', \quad z = iK'$$

sind. Die Größen K, K' können durch passende Wahl von $\varkappa$ jedwedes Verhältnis annehmen. Da $sa\,z$ keinen komplexen Parameter enthält, so fließt ohne alle Rechnung die Lösung unserer Aufgabe für das Rechteck aus der Funktion

$$W = \sum E_\mu \lg(sa^2 z - sa^2 z_\mu)(sa^2 z - sa^2 z'_\mu),$$

was mit Heine übereinstimmt. Läßt man $\varkappa$ gegen Null konvergieren, so wird aus $sa\,z$ einfach $\sin z$ und das Rechteck erstreckt sich nach einer Richtung ins Unendliche.

Das Innere einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 und den Scheiteln $z = \pm a$, $z = \pm ib$, wird durch die Funktion

$$\theta = \sqrt{k}\, sa\left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arc} \sin z\right)$$

nach Schwarz auf das Innere des Einheitskreises abgebildet, wo die Jacobische Größe q

$$q = (a-b)^2 : (a+b)^2,$$

und k aus q durch Thetafunktionen zu bestimmen ist. Setzt man

$$\theta = \zeta - i : \zeta + i, \quad \zeta = -i(\theta + 1) : (\theta - 1),$$

so bildet sich das Innere der Ellipse auf die obere ζ-Halbebene eineindeutig ab. Man hat also, wenn man momentan $2K \operatorname{arc} \sin z$ durch πu wiedergibt,

$$W = \sum E_\mu \lg\left(-i\frac{\sqrt{k}\, sa\, u + 1}{\sqrt{k}\, sa\, u - 1} + i\frac{\sqrt{k}\, sa\, u'_\mu + 1}{\sqrt{k}\, sa\, u'_\mu - 1}\right)\left(-i\frac{\sqrt{k}\, sa\, u + 1}{\sqrt{k}\, sa\, u - 1} - i\frac{\sqrt{k}\, sa\, u'_\mu + 1}{\sqrt{k}\, sa\, u'_\mu - 1}\right)$$

$$= \sum E_\mu \lg\left(\sqrt{k}\, sa\, u - \sqrt{k}\, sa\, u_\mu\right)\left(\sqrt{k}\, sa\, u - \frac{1}{\sqrt{k}\, sa\, u'_\mu}\right) + \text{Const.}$$

oder von der additiven Konstanten abgesehen

$$W = \sum E_\mu \lg \left[sa\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin z\right) - sa\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin z_\mu\right)\right] + \sum E_\mu \lg \left[k\, sa\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin z\right) sa\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin z'_\mu\right) - 1\right],$$

was, abgesehen von der Form, ebenfalls mit Heines Resultat übereinstimmt.

XVII. Die Schwarzsche Minimalfläche. Wendet man auf die in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung $sa\,x\, sa\,y\, sa\,z = \pm 1$ dargestellte Fläche die Eulersche Formel zur Bestimmung der mittleren Krümmung an, so erhält man einen Ausdruck, der den Faktor $1 + k^2 + k^4$ enthält, und der deshalb verschwindet, wenn k^2 den Wert $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (oder den reziproken) besitzt. Da der Modul komplex ist, so ist es fraglich, ob die Fläche reell ist, wir benutzen sie nur, weil sich bei ihr die mittlere Krümmung leicht bestimmt, als Ausgangspunkt, um zu einer sicher reellen Fläche zu gelangen. Dabei bedienen wir uns des Satzes, daß, wenn die Formel für die mittlere Krümmung bei der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ den Wert Null ergibt, dies auch für die Gleichung $F(ex + a,\ ey + b,\ ez + c) = 0$ der Fall ist. Wiederholt werden wir einen gemeinsamen Faktor der Größen xyz in diese einrechnen, ihn unterdrücken. Da der Modul den absoluten Betrag Eins hat, so folgt übrigens aus XXXIII, daß eine Transformation auf einen reellen Modul möglich ist. Zunächst gehen wir zu der Gleichung über

$$sa\left(x + K + \tfrac{1}{2} iK'\right) sa\left(y + K + \tfrac{1}{2} iK'\right) sa\left(z + K + \tfrac{1}{2} iK'\right) = \pm 1$$

und transformieren sie mittels der Formel XIX (4). Der transformierte Modul wird dann

$$\mathfrak{k} = (1 - \sqrt{k})^2 : (1 + \sqrt{k})^2 = -\, tg^2 \tfrac{1}{6}\pi, \quad \mathfrak{k}' = \sqrt{1 - tg^4 \tfrac{1}{6}\pi} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Durch diese Transformation erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß $(\sqrt{k})^3 = -1$ ist, die Gleichung:

$$\frac{1 - \sqrt{\mathfrak{k}}\, sa\left(\frac{1}{2} i (1 + \sqrt{k})^2 x, \mathfrak{k}\right)}{1 + \sqrt{\mathfrak{k}}\, sa\left(\frac{1}{2} i (1 + \sqrt{k})^2 x, \mathfrak{k}\right)} \cdot \frac{1 - \sqrt{\mathfrak{k}}\, sa\left(\frac{1}{2} i (1 + \sqrt{k})^2 y, \mathfrak{k}\right)}{1 + \sqrt{\mathfrak{k}}\, sa\left(\frac{1}{2} i (1 + \sqrt{k})^2 y, \mathfrak{k}\right)} \cdot \frac{1 - \sqrt{\mathfrak{k}}\, sa\left(\frac{1}{2} i (1 + \sqrt{k})^2 z, \mathfrak{k}\right)}{1 + \sqrt{\mathfrak{k}}\, sa\left(\frac{1}{2} i (1 + \sqrt{k})^2 z, \mathfrak{k}\right)} = \mp 1.$$

Diese Gleichung transformieren wir nochmals mittels der Formel XVI (2a), rechnen aber den Faktor $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{k})^2$ in xyz ein. So erhalten wir:

$$\frac{1 - i\sqrt{\mathfrak{k}}\, tga(x, \mathfrak{k}')}{1 + i\sqrt{\mathfrak{k}}\, tga(x, \mathfrak{k}')} \cdot \frac{1 - i\sqrt{\mathfrak{k}}\, tga(y, \mathfrak{k}')}{1 + i\sqrt{\mathfrak{k}}\, tga(y, \mathfrak{k}')} \cdot \frac{1 - i\sqrt{\mathfrak{k}}\, tga(z, \mathfrak{k}')}{1 + i\sqrt{\mathfrak{k}}\, tga(z, \mathfrak{k}')} = \mp 1.$$

Beschränken wir uns auf den Fall des positiven Vorzeichens auf der rechten Seite und unterdrücken den Modul $\mathfrak{k}' = 2\sqrt{2} : 3$ in der Bezeichnung, so folgt aus dieser Gleichung durch Fortschaffung der Nenner:

(1)
$$tga\, x + tga\, y + tga\, z - \mathfrak{k} \cdot tga\, x \cdot tga\, y \cdot tga\, z = 0, \quad -\mathfrak{k} = \tfrac{1}{3},$$

$$3\, ctga\, x\, ctga\, y + 3\, ctga\, y\, ctga\, z + 3\, ctga\, z\, ctga\, x + 1 = 0, \quad \text{Modul } 2\sqrt{2} : 3.$$

Wir sind so zu einer Flächengleichung mit einem reellen Modul gelangt, den wir nun nicht mehr mit $\mathfrak{k}'$, sondern mit k bezeichnen. Liegt der Punkt xyz auf der Fläche, so liegen auch die Punkte $x + 2\lambda K,\ y + 2\mu K,\ z + 2\nu K$ auf ihr, wenn $\lambda \mu \nu$ beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind. Die Fläche läßt sich demnach aus unendlich vielen einander kongruenten Stücken zusammensetzen, und wenn eine Gerade auf ihr liegt, so enthält sie ein unendliches System einander paralleler gerader Linien.

Die drei Geraden

(2)
$$g_1;\ x = 0,\ y + z = 0; \quad g_2;\ y = 0,\ z + x = 0; \quad g_3;\ z = 0,\ x + y = 0,$$

die in einer Ebene $x + y + z = 0$, der Tangentialebene im Koordinatenanfange, liegen, verlaufen auf ihr. Ebenso die Geraden

(3)
$$g_1';\ x = K,\ y = z + K; \quad g_2';\ y = K,\ z = x - K; \quad g_3';\ z = K,\ x = y + K.$$

Endlich die Geraden

$$h_1;\ z = -\tfrac{1}{2}K,\ y = \tfrac{1}{2}K; \quad h_1';\ z = -\tfrac{1}{2}K,\ x = \tfrac{1}{2}K; \quad h_2;\ x = \tfrac{1}{2}K,\ y = -\tfrac{1}{2}K,$$

die den Koordinatenachsen parallel sind.

Die Geraden $g_1 g_2$ schneiden sich im Punkte $x=0,\ y=0,\ z=0,\ g_1 g_2{}'$ im Punkte $x=0,\ y=K,\ z=-K,$ die Gerade $g_2 g_1{}'$ im Punkte $x=K,\ y=0,\ z=-K,\ g_1{}' g_2{}'$ im Punkte $x=K,\ y=K,\ z=0.$

Es liegt also ein Rhombus auf der Fläche, dessen zusammenstoßende Kanten einen Winkel von 60^0 mit einander bilden. Konstruiert man den Rhombus aus Draht und taucht das Gestell in Seifenwasser, so erhält man nach Herausziehen aus der Flüssigkeit ein Stück der Minimalfläche.

Ersetzt man xyz durch $ix,\ iy,\ iz,$ und transformiert mittelst XVI (2), so erhält man eine neue Minimalfläche, deren Gleichung

(5) $$\frac{\sqrt{3}}{say}\,\frac{\sqrt{3}}{saz}+\frac{\sqrt{3}}{saz}\,\frac{\sqrt{3}}{sax}+\frac{\sqrt{3}}{sax}\,\frac{\sqrt{3}}{say}-1=0, \quad k=\frac{1}{3},$$

ist, die auch einen Rhombus enthält; zwei Kanten schließen einen Winkel von 60^0, zwei andere einen von 90^0 miteinander ein.

XVIII. Das geschwungene Seil. Wird ein Seil, dessen Länge $> 2a$ ist, in den Punkten 0 und $2a$ der x-Achse, auf der die y-Achse senkrecht steht, befestigt und dann um die x-Achse geschwungen, so erlangt es eine Gleichgewichtsform, deren Gestalt gefunden werden soll. Die Spannung sei T, das Bogenelement ds. Dann liefern die Prinzipien der Mechanik zwei Differentialgleichungen von der Form:

(1) $$d\left(\frac{T\,dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(\frac{T\,dy}{ds}\right)+n\,y\,ds=0,$$

woraus folgt:

(2) $$\frac{T\,dx}{ds}=c, \quad d\left(\frac{T\,dy}{dx}\,\frac{dx}{ds}\right)+n\,y\,ds=c\,d\,\frac{dy}{dx}+n\,y\,ds=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx}{ds}+\frac{n}{c}\,y=0,$$

(3) $$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\frac{ds}{dx}\,\frac{d^2s}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{n}{c}\,y\,\frac{dy}{dx}\,\frac{ds}{dx}, \quad \frac{d^2s}{dx^2}=-\frac{n}{c}\,y\,\frac{dy}{dx}.$$

Nimmt man die drei ersten der folgenden Gleichungen als gleichzeitig bestehend an, so folgt daraus die vierte:

(4) $$y=b, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{ds}{dx}=1; \quad \frac{ds}{dx}=1+\frac{1}{2}\,\frac{n}{c}\,(b^2-y^2),$$

(5) $$T=c\,\frac{ds}{dx}=c+\frac{1}{2}\,n\,(b^2-y^2).$$

Weiter ist

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\left(\frac{ds}{dx}-1\right)\left(\frac{ds}{dx}+1\right)=\frac{1}{2}\,\frac{n}{c}\,(b^2-y^2)\left(2+\frac{1}{2}\,\frac{n}{c}\,(b^2-y^2)\right)=\frac{n}{c}\,(b^2-y^2)\left(1+\frac{n}{4c}\,(b^2-y^2)\right).$$

Setzt man nun $y=b\,sa\,\alpha x$, so folgt

$$b^2\alpha^2\,ca^2\alpha x\,da^2\alpha x=\frac{n}{c}\,b^2\,ca^2\alpha x\left(\frac{4c+nb^2}{4c}-\frac{b^2n}{4c}\,sa^2\alpha x\right).$$

$$\alpha^2\,da^2\alpha x=\frac{n}{c}\,\frac{4c+nb^2}{4c}\,da^2\alpha x, \quad k^2=\frac{nb^2}{4c+nb^2}, \quad k'^2=\frac{4c}{4c+nb^2}.$$

Damit diese Gleichung erfüllt sei, muß man

(6) $$\alpha^2=\frac{n\,(4c+nb^2)}{4c^2}=\frac{n^2b^2}{c}\,\frac{4c+nb^2}{4cnb^2}=\frac{n^2b^2}{4c^2}\cdot\frac{1}{k^2}, \quad \alpha=\frac{nb}{2ck}$$

setzen. Es nimmt y für $x=2a$ den Wert Null an, also muß dort $\alpha x=2K$, $\alpha=K:a$ sein. Daraus ergibt sich für die Gestalt der Kurve die Gleichung:

(7) $$y=b\,sa\,\frac{Kx}{a}, \quad k=\frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{4c+nb^2}},$$

und die stärkste Abweichung von der x-Achse liegt an der Stelle $x=a$, wo $y=b$ ist. Die Größe a ist gegeben und b bestimmt man durch eine einfache Beobachtung.

Findet man durch eine zweite Beobachtung die Ausweichung an der Stelle $x=\frac{1}{2}a$ gleich b', so ist

(8) $$\frac{b'}{b} = sa\frac{1}{2}K = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad 1+k' = \frac{b^2}{b'^2}, \quad k' = \frac{b^2-b'^2}{b'^2}, \quad k = \frac{b\sqrt{2b'^2-b^2}}{b'b'}$$

Damit ist k gefunden und K ist durch XIII (4) bestimmt. Die Seilschwungkurve gibt ein unmittelbares Bild von dem Verlauf der Kurve $y = sa\,x$.

XIX. Die geodätische Linie. Bewegt sich ein Punkt ohne Reibung auf einer Oberfläche bloß vermöge der Trägheit, so beschreibt er eine geodätische Linie, die für den Fall des Sphäroides (Erdsphäroides) kurz behandelt werden soll. Ist die Fläche eine Rotationsfläche, deren Rotationsachse die z-Achse ist, und ist $z = \int f(\varrho)\,d\varrho$ die Gleichung der Meridiankurve, ϱ der Abstand von der z-Achse, so liefern die Prinzipien der Mechanik die Differentialgleichungen

$$dl = \frac{c}{\varrho}\sqrt{\frac{1+f(\varrho)f(\varrho)}{\varrho^2-c^2}}\,d\varrho, \qquad ds = \varrho\sqrt{\frac{1+f(\varrho)f(\varrho)}{\varrho^2-c^2}}\,d\varrho,$$

wo l die geographische Länge, s die Kurvenlänge bedeutet. Die Gleichung des Sphäroides sei $x^2+y^2+nz^2-1=0$, so ist $e^2=(n-1):n$ die Exzentrizität der Meridianellipse, deren kleine Achse als Rotationsachse angenommen ist. Der Äquatorradius ist Eins. Es ist

$$\int f(\varrho)\,d\varrho = \sqrt{1-\varrho^2}:\sqrt{n}, \quad f(\varrho) = -\varrho:\sqrt{n}\sqrt{1-\varrho^2}, \quad 1+f(\varrho)f(\varrho) = (1-e^2\varrho^2):(1-\varrho^2).$$

Daraus ergeben sich die Differentialgleichungen

(1) $$dl = \frac{1}{2}\frac{c\,d(\varrho^2)}{\varrho^2}\sqrt{\frac{1-e^2\varrho^2}{(1-\varrho^2)(\varrho^2-c^2)}}, \quad ds = \frac{1}{2}d(\varrho^2)\sqrt{\frac{1-e^2\varrho^2}{(1-\varrho^2)(\varrho^2-c^2)}}.$$

Es liegt ϱ^2 zwischen c^2 und 1, und $\varrho = \pm c$ liefert die beiden Parallelkreise, die die Kurve berührt. Wir setzen $\varrho^2 = c^2 + \zeta(1-c^2)$, so daß ζ zwischen Null und Eins liegt, und finden

$$d(\varrho^2) = (1-c^2)d\zeta, \quad 1-\varrho^2 = (1-c^2)(1-\zeta), \quad \varrho^2-c^2 = (1-c^2)\zeta, \quad 1-e^2\varrho^2 = (1-e^2c^2)(1-\varkappa\zeta),$$
$$\varkappa = e^2(1-c^2):(1-e^2c^2), \quad \varkappa' = 1-\varkappa = (1-e^2):(1-e^2c^2), \quad 1-e^2c^2 = (1-e^2):\varkappa', \quad c^2 = (e^2-\varkappa):e^2\varkappa'.$$

Dabei ist $\varkappa < e^2$ beim Erdsphäroid sehr klein. Weiter ist

(2) $$\sqrt{(1-\varrho^2)(\varrho^2-c^2)(1-\varrho^2e^2)} = (1-c^2)\sqrt{1-e^2c^2}\cdot\sigma, \quad \sigma = \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa\zeta)},$$

und also

(3) $$dl = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{1-e^2c^2}\cdot(1-\varkappa\zeta)\,d\zeta}{(c^2+\zeta(1-c^2))\,\sigma} = \frac{c\sqrt{1-e^2c^2}\,da^2u\,du}{c^2+(1-c^2)\,sa^2u}, \quad \frac{1}{2}\frac{d\zeta}{\sigma} = du,$$

(4) $$ds = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2c^2}\,(1-\varkappa\zeta)\,d\zeta:\sigma = \sqrt{1-e^2c^2}\,da^2u\,du.$$

Messen wir s von der Stelle $\zeta=0$, $\varrho=c$ an, so finden wir (I. Teil, XXVI 2)

(5) $$s = \sqrt{1-e^2c^2}\int_0^u da^2u\,du = \sqrt{(1-e^2c^2)}\cdot\left(\frac{E}{K}u + Z_{01}(u)\right).$$

Der Bogen zwischen dem Berührungskreise $u=0$ und dem Äquator $u=K$, ist aE, wenn $a=\sqrt{(1-e^2c^2)}$ gesetzt wird, und mithin gleich dem Quadranten einer Ellipse, deren große Achse a und deren numerische Exzentrizität $\sqrt{\varkappa}$ ist.

Um die geographische Länge durch u auszudrücken, setzen wir

$$\frac{1-c^2}{c^2\varkappa} = \frac{1-e^2c^2}{e^2c^2} = -sa^2iv, \quad sa\,iv = \frac{i\sqrt{1-e^2c^2}}{ec}, \quad da\,iv = \frac{1}{c}, \quad ca\,iv = \frac{1}{ec},$$

so ist

$$sa\,iv\;da\,iv : ca\,iv = i\sqrt{1-e^2c^2}:c,$$

(6) $$dl = \frac{\sqrt{1-e^2c^2}}{c}\;\frac{da^2u\,du}{1-\varkappa\,sa^2iv\,sa^2u} = \frac{e\,sa\,iv\,da\,iv\,da^2u\,du}{i\,ca\,iv\,(1-\varkappa\,sa^2iv\,sa^2u)}$$

und nach der Jacobischen Formel (I. Teil XXIX 1), wenn die geographische Länge von ebenda gezählt wird, wie die Kurvenlänge

$$l = ie(uZ_{10}(iv) + \tfrac{1}{2} lg(\theta_{01}(u-iv):\theta_{01}(u+iv)). \tag{7}$$

Setzt man $u = K$, so erhält man die geographische Länge L des Schnittpunktes mit dem Äquator

$$L = ie KZ_{10}(iv). \tag{8}$$

Ist c unendlich wenig von 1 verschieden, so ist $\varkappa = 0$, $sa\,iv = sin(iv\pi:2K) = i\sqrt{1-e^2}:e$, $q = 0$

$$Z_{10}(iv) = \frac{-\pi}{2K}\,\frac{sin\frac{vi\pi}{2K} + 3q^2 sin\frac{3vi\pi}{2K}\cdots}{cos\frac{vi\pi}{2K} + 3q^2 cos\frac{3vi\pi}{2K}\cdots} = \frac{-\pi i}{2K}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{e},\quad 2L = \pi\sqrt{1-e^2}.$$

Im Punkte $2L$ wird der Aquator von der ihm unendlich nahe benachbarten geodätischen Linie geschnitten, er gehört zur Hüllkurve der geodätischen Linien. Diese Hüllkurve ist von Herrn v. Braunmühl im 14. Band der Leipziger Annalen näher untersucht*); sie tritt zuerst bei Jacobi auf.

XX. Anwendung der Liouvilleschen Sätze auf eine Kurve dritter Ordnung. Es sei

$$y^2 = c^2x(1-x)(1-k^2x)$$

die Gleichung der Kurve $C^{(3)}$, so findet man die Parameterdarstellung

$$x = sa^2u = \varphi(u),\quad y = csaucaudau = \tfrac{1}{2}c(sa^2u)' = \psi(u).$$

Der Ausdruck $Ax + By + C = A\varphi(u) + B\psi(u) + C = F(u)$ ist eine doppeltperiodische Funktion dritter Ordnung mit den Perioden $2K$, $2iK'$. Drei Punkte $u_1u_2u_3$ von $C^{(3)}$ liegen auf einer Geraden (XV 5a), wenn $u_1 + u_2 + u_3 \equiv iK'$ ist. Sind $u_1'u_2'u_3'$ drei Punkte einer zweiten Sekante, so sind die weiteren Schnittpunkte der Verbindungslinien u_1u_1', u_2u_2', u_3u_3':

$$u_1'' = iK' - u_1 - u_1',\quad u_2'' = iK' - u_2 - u_2',\quad u_3'' = iK' - u_3 - u_3'.$$

Die Punkte $u_1''u_2''u_3''$ liegen auf einer Geraden, weil $u_1'' + u_2'' + u_3'' \equiv iK'$ ist. Insbesondere:

Die Tangenten in den Schnittpunkten $u_1u_2u_3$ einer Sekante treffen $C^{(3)}$ in drei Punkten einer Geraden, der Begleiterin der ersten.

Die vier Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte u an $C^{(3)}$ haben die Parameter

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(iK'-u),\quad u_2 = \tfrac{1}{2}(iK'-u) + K,\quad u_3 = \tfrac{1}{2}(iK'-u) + iK',\quad u_4 = \tfrac{1}{2}(iK'-u) + K + iK',$$

sie bilden ein Viereck, dessen drei Nebenecken auch auf $C^{(3)}$ liegen.

Gehen die Seiten eines $2n$-Eck-$2n$-Seits durch $2n$ feste Punkte auf $C^{(3)}$, und liegen die Ecken auf $C^{(3)}$, so bleibt diese Eigenschaft erhalten, wenn man eine Ecke über $C^{(3)}$ laufen läßt.

Gehen die Seiten eines $2n$-Eck-$2n$-Seits durch zwei feste Punkte auf $C^{(3)}$ und liegen auch die Ecken auf ihr, so bleibt diese Eigenschaft erhalten, wenn man eine Ecke über $C^{(3)}$ laufen läßt. (Steinersches Punktpaar n^{ter} Ordnung.)

Ist u_1 der Parameter des einen Punktes eines Steinerschen Punktpaares, und u_2 der des andern, so ist

$$nu_1 \equiv nu_2.$$

Ist $u_1 = 0$, was die Allgemeinheit nicht beschränkt, so ist

$$u_2 = (2pK + 2qiK'):n,\quad p, q = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Verbindet man u mit u_1 und u_2, und sind $u_1'u_2'$ die weiteren Schnittpunkte dieser Geraden mit $C^{(3)}$, so sind $u_1'u_2'$ auch ein Steinersches Punktpaar n^{ter} Ordnung.

*) Die Differentiation eines Integrals nach einem Parameter ist dort wohl nicht streng, erstens weil der Differentialquotient keinen Sinn hat, und zweitens weil die obere Grenze vom Parameter abhängt. Der letzte Einwand läßt sich indessen leicht beseitigen.

Es gibt neun Wendepunkte und neun Wendetangenten, für sie ist $3u \equiv iK'$. Daher sind ihre Parameter

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{3}iK', & \frac{1}{3}iK' + \frac{2}{3}K, & \frac{1}{3}iK' + \frac{4}{3}K, \\ iK', & iK' + \frac{2}{3}K, & iK' + \frac{4}{3}K, \\ \frac{5}{3}iK', & \frac{5}{3}iK' + \frac{2}{3}K, & \frac{5}{3}iK' + \frac{4}{3}K. \end{array}$$

Jede Gerade durch zwei Wendepunkte enthält einen dritten. Die zwölf Dreiwendepunktslinien bilden eine Konfiguration (9_3).

Die Punkte $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6$ liegen auf einem Kegelschnitte, wenn $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \equiv 0$ ist. Es gibt 36 $C^{(3)}$ sechspunktig berührende Kegelschnitte, neun davon (die Wendetangenten) sind uneigentliche. Ihre Parameter haben die Werte $\frac{1}{3}pK + \frac{1}{3}qiK'$, wo $p, q = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ zu nehmen sind. — Legt man durch vier feste Punkte der Kurve einen Kegelschnittbüschel, so liegen die Schnittpunkte irgend eines Individuums desselben mit einem festen Punkte der Kurve, dem Gegenpunkte, in einer Geraden. Sind $v_1 v_2 v_3 v_4$ die Parameter der vier festen Punkte, so ist $u = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - iK'$ der Parameter des Gegenpunktes.